数理情報科学シリーズ
10

ヒルベルト空間と線型作用素

HILBERT SPACES AND
LINEAR OPERATORS

日合文雄・柳 研二郎 著

牧野書店

まえがき

この本を著すにあたっての目標は，ヒルベルト空間の初歩から始めて，ヒルベルト空間上の線型作用素に関する本格的な諸理論までを完全な証明をつけて解説することであった．内積が定義された線型空間で，それから定まる距離が完備なものであるヒルベルト空間は，有限次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ やユニタリー空間 $\mathbb{C}^n$ を一般化したものである．また，ヒルベルト空間上の作用素は，線型代数学で扱った行列を無限次元に拡張したものと見ることができる．ヒルベルト空間は，歴史的には，ヒルベルトによる積分方程式論に由来するが，むしろフォン・ノイマンによる量子力学の数学的定式化において基本的な役割を果たした．現在では，バナッハ空間とならんで，関数解析学の領域で最も基礎的で重要な空間となっている．

バナッハ空間論と違って，ヒルベルト空間については空間論そのものは簡単であり，シュワルツの不等式から始めて，正規直交基底，次元，直交分解，リースの表現定理までで十分である．したがって，ヒルベルト空間の関連分野といえば，ヒルベルト空間上の作用素論が話題の中心となる．これまで日本語で書かれた関数解析学関係の参考書は，スペクトル分解定理あたりを最終目標にした入門書がほとんどであったし，でなければ特定の話題に限定した専門書であった．しかも，それらの多くが既に絶版になっている．このような現状においては，作用素論の全貌がある程度見渡せるような参考書が望ましいと考え，あくまで入門書であっても，専門的な諸理論の入口あたりまで含ませるように意図した．そのため，本書の後半 (第 5, 6 章) が入門書としてはやや程度が高くなったかも知れない．

本書の概要を述べると，第 1 章では，ヒルベルト空間の基礎から始めて，有界線型作用素の基本事項を説明する．この本はヒルベルト空間上の作用素を主題としているので，バナッハ空間などについての説明は必要最低限にとどめた．しかし，バナッハ空間で成立する重要な一様有界性定理，開写像定理，閉グラフ定理は 1.3 節でまとめて証明してある．第 2 章では，ヒルベルト空間上の線型作用素に関する一般的な事柄を説明する．2.1 節で自己共役

作用素，ユニタリー作用素，射影作用素など基本的な有界作用素をとり挙げる．2.2 節で有界作用素の極分解を示し，2.3 節で非有界線型作用素について説明する．

ヒルベルト空間上の作用素論を学ぶとき，スペクトル分解定理が当面の目標になる．第 3 章では，作用素のスペクトルとスペクトル分解について解説する．3.2 節で示した自己共役作用素に対するスペクトル分解定理については，いろいろな証明法が知られている．もっと一般の正規作用素に対するスペクトル分解は，付録の A.5 節で可換 C^*-環のゲルファンド-ナイマルクの定理を使って証明してある．非有界自己共役作用素のスペクトル分解とストーンの定理が与えられている 3.3 節は，2.3 節とともに最初はとばして読んでも差しつかえない．

第 4 章では，4.1 節で有界作用素の重要なクラスであるコンパクト作用素の一般論を説明し，4.2 節でコンパクト作用素の部分クラスであり ℓ^p-数列空間の作用素版とみなせるシャッテン・クラスについて解説する．トレース・クラスやヒルベルト-シュミット・クラスはシャッテン・クラスの特別な場合になる．4.1 節までが学部レベルの基礎コースであるが，4.2 節以降はやや上級コースで大学院レベルの読者を想定している．

第 5, 6 章では，作用素論において興味あるいくつかの話題をとり挙げる．5.1 節では，レーヴナー-ハインツの不等式から始めて，作用素単調関数と作用素凸関数の理論を解説し，作用素論における最近の話題の 1 つであるフルタ不等式で締めくくってある．5.2 節では，作用素単調関数と密接な関係がある久保-安藤による作用素平均の理論を紹介する．第 5 章の作用素単調と作用素平均は，作用素不等式の研究などで重要な役割を果たしている．作用素特論と名づけた第 6 章では，フレドホルム理論，ダイレーション理論，サブ正規およびハイポ正規作用素などの話題について解説する．さらに，ヒルベルト空間上の作用素論から少しずれるが，バナッハ空間上の測度 (特にガウス測度) についても最後にとり挙げる．

第 5, 6 章の話題は著者の興味と知識に基づいて選んだが，重要なものは大体含まれるようにした．しかし，当初とり挙げる予定であったテープリッツ作用素については，残念ながら含めることができなかった．テープリッツ作用素は 6.1 節のフレドホルム理論とも関係して興味ある話題であるので，将来機会があれば追加したい．

付録では，関数解析学の基本定理のうち，本文で使われたりして本書の内

容に直接関係があるものを証明をつけて詳しく解説してある．特に，リース-マルコフ-角谷の定理とストーン-ワイエルシュトラスの定理は，スペクトル分解定理の証明で本質的に使われている．本文とは別に付録だけを独立に読んでも有益であろう．

本書の読者としては，位相空間論と測度・積分論の知識を一応仮定している他には，複素関数論のわずかな知識があれば十分である．各章末にある演習問題は，本文を補足するものや本文で省略した証明の部分も多く含まれているので，読者はぜひ試みて頂きたい．巻末の文献ノートでは，さらに専門的に学びたい読者の便宜を考えて，本書の内容に関連する文献や定理の出典などを説明してある．ついでながら，この本では作用素論に話を限定して，作用素環 (主に C^*-環とフォン・ノイマン環) にまで立ち入るのを意識的に避けたが，作用素環論を学ぶときにも本書の内容が役立つはずである．

本書を著わすきっかけを与えて頂いた大矢雅則氏に感謝致します．牧野書店の牧野末喜氏には，いろいろとお世話になった上に，内容と頁数について著者の自由に任せてもらい，厚くお礼を申し上げます．また，草稿を読んで下さり多くの貴重なご意見を頂きました安藤毅先生には心から感謝致します．
最後に，本書によって作用素論 (さらに作用素環論) の分野に多くの人が関心をもって頂ければ幸いです．

1995 年 4 月　　　　著者

目　　次

第 1 章

ヒルベルト空間

この章では，関数解析学全般にわたっての基礎であるヒルベルト空間とバナッハ空間について初歩から解説する．1.1 節で，ノルム空間，バナッハ空間，ヒルベルト空間の定義から始めて，シュワルツの不等式，ベッセルの不等式，正規直交基底などヒルベルト空間に関する基礎を確立する．1.2 節で，有界線型作用素と有界線型汎関数についての基本事項を述べてから，ヒルベルト空間における最短距離定理，直交分解定理，リースの表現定理を示す．再生核ヒルベルト空間についても簡単に触れる．1.3 節で，ベールのカテゴリー定理を基礎にバナッハ空間で成立し，関数解析学で重要な位置をしめる一連の定理，すなわち，一様有界性定理，開写像定理，閉グラフ定理を証明する．

1.1 ヒルベルト空間の基本性質

この節では，内積あるいはノルムが定義された線型空間がもつ基本的な性質を説明する．

定義 1.1.1 X をスカラー体 $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$) 上の線型空間とする．

(1) $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ が任意の $x, y \in X$ と $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して

(i) $\|x\| \geq 0$, かつ $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

(ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$

を満たすとき，$\|\cdot\|$ を X の**ノルム**といい，$(X, \|\cdot\|)$ を**ノルム空間**という．以下，単に X とも表す．このとき

$$d(x,y) = \|x-y\|, \qquad x, y \in X \tag{1.1}$$

とおくと，d は X の距離になる．

(2) ノルム空間 $(X, ||\cdot||)$ が (1.1) の距離で完備，すなわち $\{x_n\}$ がコーシー列 (i.e. $||x_m - x_n|| \to 0$ $(m, n \to \infty)$) ならば $||x_n - x|| \to 0$ となる $x \in X$ が存在するとき，$(X, ||\cdot||)$ を**バナッハ空間**という．

定義 1.1.2 $\langle\cdot\,,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ が任意の $x, y \in X$ と $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して

(i) $\langle x, x\rangle \geq 0$, かつ $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

(ii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$,

(iii) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,

(iv) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

を満たすとき，$\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ を X の**内積**といい，$(X, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ を**内積空間**または**前ヒルベルト空間**という．

上の (ii)–(iv) より X の内積は次も満たす：

(v) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$,

(vi) $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$.

定義 1.1.3 $\varphi : X \times X \to \mathbb{K}$ で，$\varphi(x, y)$ が x について線型，y について共役線型，すなわち任意の $x, y, z \in X$ と $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して

$$\varphi(x + y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z), \qquad \varphi(\alpha x, y) = \alpha\varphi(x, y),$$

$$\varphi(x, y + z) = \varphi(x, y) + \varphi(x, z), \qquad \varphi(x, \alpha y) = \overline{\alpha}\varphi(x, y)$$

となるとき，φ を X 上の**双線型汎関数**という．この φ が**エルミート**とは $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ $(x, y \in X)$ であるときをいい，**正定値**とは $\varphi(x, x) \geq 0$ $(x \in X)$ であるときをいう．

特に，X の内積は双線型汎関数であり，エルミートかつ正定値である．$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき，X 上の双線型汎関数は正定値ならばエルミートである (演習問題 1.1)．

命題 1.1.4 (シュワルツの不等式) X を内積空間とするとき，任意の $x, y \in X$ に対して

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

等号は x, y が 1 次従属のときに限る．

証明 $y=0$ のとき，両辺 $=0$ で成立．$y \neq 0$ のとき，$y' = (1/\langle y, y\rangle^{1/2})y$ とおくと

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x - \langle x, y'\rangle y', x - \langle x, y'\rangle y'\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - \langle x, y'\rangle\langle y', x\rangle - \overline{\langle x, y'\rangle}\langle x, y'\rangle + |\langle x, y'\rangle|^2\langle y', y'\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - 2|\langle x, y'\rangle|^2 + |\langle x, y'\rangle|^2 \\ &= \langle x, x\rangle - |\langle x, y'\rangle|^2. \end{aligned}$$

よって $|\langle x, y'\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle$ となり $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$.

上の不等式で等号成立のとき，$x - \langle x, y'\rangle y' = 0$ となるから x, y が 1 次従属．逆に x, y が 1 次従属ならば，ある $\alpha \in \mathbb{K}$ で $x = \alpha y$ または $y = \alpha x$. $x = \alpha y$ として

$$|\langle x, y\rangle|^2 = |\langle \alpha y, y\rangle|^2 = |\alpha|^2|\langle y, y\rangle|^2 = \langle \alpha y, \alpha y\rangle\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

$y = \alpha x$ でも同様． ■

実際，シュワルツの不等式 (等号条件は除く) は，$\langle\cdot, \cdot\rangle$ が正定値かつエルミートな双線型汎関数ならば成立することに注意する．

命題 1.1.5 X を内積空間とする．各 $x \in X$ に対して

$$||x|| = \langle x, x\rangle^{1/2} \tag{1.2}$$

と定義すると，$||\cdot||$ は X のノルムになる．

証明 ノルムの最初の性質は内積の最初の性質から明らか．

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= ||x||^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + ||y||^2 \\ &= ||x||^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + ||y||^2 \\ &\leq ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2 \\ &= (||x|| + ||y||)^2. \end{aligned}$$

上で不等号はシュワルツの不等式による．よって $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$. また

$$||\alpha x||^2 = \langle \alpha x, \alpha x\rangle = \alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle = (|\alpha|\,||x||)^2$$

より $||\alpha x|| = |\alpha|\,||x||$. したがって $||\cdot||$ は X のノルムになる． ■

命題 1.1.6　X を内積空間とし，$x, y \in X$ とする．

(1) **(中線定理)**

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2). \tag{1.3}$$

(2) **(極化等式)** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ として

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2). \tag{1.4}$$

証明　(1)

$$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = ||x||^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + ||y||^2,$$
$$||x-y||^2 = \langle x-y, x-y\rangle = ||x||^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + ||y||^2$$

より明らか．

(2)

$$||x+y||^2 - ||x-y||^2 = 4\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle,$$
$$||x+iy||^2 - ||x-iy||^2 = 4\,\mathrm{Re}\langle x, iy\rangle = 4\,\mathrm{Im}\langle x, y\rangle$$

より従う．　■

定義 1.1.7　内積空間 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ において，(1.2) のノルムから入る距離が完備のとき，X を**ヒルベルト空間**という．$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき**実**ヒルベルト空間といい，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき**複素**ヒルベルト空間という．以下では，ヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ で表し，スカラー体 $\mathbb{K}$ は断らない限り $\mathbb{C}$ とする．

例 1.1.8　(1) $\mathbb{C}^n$ はエルミート内積

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_i, \qquad x = (\xi_1, \ldots, \xi_n),\ y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$$

によりヒルベルト空間になる．

(2) $\ell^2 = \{(\xi_n)_{n=1}^{\infty} : \xi_n \in \mathbb{C},\ \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < +\infty\}$ は内積

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\eta}_n, \qquad x = (\xi_n),\ y = (\eta_n)$$

によりヒルベルト空間になる．

(3) $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とし，Ω 上の 2 乗可積分な複素数値関数 f (i.e. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ は可測関数で $\int_\Omega |f(\omega)|^2 d\mu(\omega) < +\infty$) の全体を $L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ で表す．$L^2(\Omega)$ は内積

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(\omega)\overline{g(\omega)} d\mu(\omega)$$

によりヒルベルト空間になる．ただし $f(\omega) = g(\omega)$ a.e. のとき $f = g$ とみなす．

証明 (2) のみを証明する．(1) はより簡単であり，(3) は演習問題としておく．

$x = (\xi_n)$, $y = (\eta_n) \in \ell^2$ とする．$|\xi_n + \eta_n|^2 \leq (|\xi_n| + |\eta_n|)^2 \leq 2(|\xi_n|^2 + |\eta_n|^2)$ より $x + y = (\xi_n + \eta_n) \in \ell^2$. また，$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $\alpha x = (\alpha \xi_n) \in \ell^2$. このとき，$\ell^2$ が線型空間になるのは明らか．$|\xi_n \overline{\eta}_n| \leq \frac{1}{2}(|\xi_n|^2 + |\eta_n|^2)$ より $\sum_{n=1}^\infty |\xi_n \overline{\eta}_n| < +\infty$ だから，$\langle x, y \rangle$ が定義できる．$\langle x, x \rangle = \sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^2 \geq 0$, かつ $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow \xi_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, i.e. $x = 0$. 内積の他の性質も容易．次に完備性を示す．$\{x_k\} \subset \ell^2$ をコーシー列とし，$x_k = (\xi_n^{(k)})$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$||x_k - x_l||^2 = \sum_{n=1}^\infty |\xi_n^{(k)} - \xi_n^{(l)}|^2 < \varepsilon^2, \qquad k, l \geq k_0. \tag{1.5}$$

よって各 n について，$|\xi_n^{(k)} - \xi_n^{(l)}| < \varepsilon$ $(k, l \geq k_0)$ となり，$\{\xi_n^{(k)}\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ はコーシー列．$\mathbb{C}$ の完備性より $\xi_n = \lim_{k\to\infty} \xi_n^{(k)}$ が存在する．(1.5) より任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して $\sum_{n=1}^N |\xi_n^{(k)} - \xi_n^{(l)}|^2 < \varepsilon^2$ $(k, l \geq k_0)$. $l \to \infty$ として $\sum_{n=1}^N |\xi_n^{(k)} - \xi_n|^2 \leq \varepsilon^2$ $(k \geq k_0)$. $N \to \infty$ として $\sum_{n=1}^\infty |\xi_n^{(k)} - \xi_n|^2 \leq \varepsilon^2$ $(k \geq k_0)$. よって $(\xi_n) = (\xi_n^{(k)}) - (\xi_n^{(k)} - \xi_n)$ は ℓ^2 に属し，$x = (\xi_n)$ とおくと $||x_k - x|| \leq \varepsilon$ $(k \geq k_0)$. これより $||x_k - x|| \to 0$ となり，ℓ^2 は完備である． ■

定義 1.1.9 (1) $x, y \in \mathcal{H}$ について，$\langle x, y \rangle = 0$ となるとき，x と y は**直交**するといい $x \perp y$ と表す．

(2) $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ について，任意の $m \neq n$ に対して $x_m \perp x_n$ となるとき，$\{x_n\}$ を**直交系**という．さらに，すべての x_n が $||x_n|| = 1$ のとき，すなわち $\langle x_m, x_n \rangle = \delta_{mn}$ のとき，$\{x_n\}$ を**正規直交系**という．以下，正規直交系を **ONS** と書く．

命題 1.1.10 (グラム-シュミットの直交化)　有限個または可算個の $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ が1次独立とする．

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \frac{x_1}{||x_1||}, \\
y_2 &= x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1, \qquad e_2 = \frac{y_2}{||y_2||}, \\
&\vdots \\
y_n &= x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k \rangle e_k, \qquad e_n = \frac{y_n}{||y_n||}, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

と定めるとき，$\{e_n\}$ は ONS をなす．

証明　定義より各 e_k が $x_1, \ldots, x_k$ の1次結合となるから，ある n で $y_n = 0$ とすると，$\{x_k\}$ の1次独立性に反する．よって $y_n \neq 0$ であり，e_n は定義できる．そこで $\{e_1, \ldots, e_n\}$ が ONS をなすことを帰納法で示す．$n = 1$ のとき明らか．$n = m - 1$ のとき正しいと仮定する．$n = m$ のとき，任意の $1 \leq l < k$ に対して

$$
\begin{aligned}
\langle e_m, e_l \rangle &= \frac{1}{||y_m||} \langle y_m, e_l \rangle = \frac{1}{||y_m||} \left\{ \langle x_m, e_l \rangle - \sum_{k=1}^{m-1} \langle x_m, e_k \rangle \langle e_k, e_l \rangle \right\} \\
&= \frac{1}{||y_m||} \{ \langle x_m, e_l \rangle - \langle x_m, e_l \rangle \langle e_l, e_l \rangle \} = 0.
\end{aligned}
$$

$\langle e_m, e_m \rangle = 1$ は明らか．よって $\{e_1, \ldots, e_m\}$ は ONS．■

命題 1.1.11　(1) **(ピタゴラスの定理)** $x, y \in \mathcal{H}$ が $x \perp y$ ならば

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

(2) $\{e_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{H}$ が ONS ならば，任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 + \left|\left| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right|\right|^2.$$

(3) **(ベッセルの不等式)** $\{e_n\} \subset \mathcal{H}$ が ONS ならば，任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$||x||^2 \geq \sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

証明 (1) は簡単な計算.

(2)

$$
\begin{aligned}
&\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\right\|^2\\
&\quad=\|x\|^2-2\,\mathrm{Re}\left\langle x,\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\right\rangle+\left\langle \sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k,\sum_{l=1}^{n}\langle x,e_l\rangle e_l\right\rangle\\
&\quad=\|x\|^2-2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}\overline{\langle x,e_k\rangle}\langle x,e_k\rangle+\sum_{k,l=1}^{n}\langle x,e_k\rangle\overline{\langle x,e_k\rangle}\langle e_k,e_l\rangle\\
&\quad=\|x\|^2-2\sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2+\sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2\\
&\quad=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2.
\end{aligned}
$$

(3) (2) より $\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2$. ここで $\{e_n\}$ が無限個のときは $n\to\infty$ とすればよい. ■

定義 1.1.12 $\{e_n\}\subset\mathcal{H}$ を ONS とする. すべての n で $x\perp e_n$ ならば $x=0$ であるとき, $\{e_n\}$ を**完全正規直交系**または**正規直交基底**という. 以下, 正規直交基底を **CONS** と書く.

定理 1.1.13 ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の ONS $\{e_n\}$ について次は同値：

(i) $\{e_n\}$ が CONS;

(ii) $\{e_n\}$ の 1 次結合全体が $\mathcal{H}$ で稠密；

(iii) **(フーリエ展開)** 任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して

$$x=\sum_n\langle x,e_n\rangle e_n \ (\text{無限列のときはノルムで収束});$$

(iv) **(リース-フィッシャーの等式)** 任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して

$$\|x\|^2=\sum_n|\langle x,e_n\rangle|^2;$$

(v) **(パーセバルの等式)** 任意の $x,y\in\mathcal{H}$ に対して

$$\langle x,y\rangle=\sum_n\langle x,e_n\rangle\langle e_n,y\rangle.$$

証明　以下，$\{e_n\}$ は無限列として証明する．

(i) $\Longrightarrow$ (iii)．まず，ベッセルの不等式より

$$\left\|\sum_{n=1}^{k}\langle x,e_n\rangle e_n-\sum_{n=1}^{l}\langle x,e_n\rangle e_n\right\|^2=\sum_{n=l+1}^{k}|\langle x,e_n\rangle|^2\to 0\ \ (k>l\to\infty)$$

だから，$\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n$ はノルム収束する．すべての k に対して

$$\left\langle x-\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n, e_k\right\rangle=\langle x,e_k\rangle-\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle\langle e_n,e_k\rangle=0.$$

$\{e_n\}$ が CONS だから $x-\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n=0$．つまり $x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n$．

(iii) $\Longrightarrow$ (ii)．$\|x-\sum_{n=1}^{N}\langle x,e_n\rangle e_n\|\to 0\ (N\to\infty)$ より明らか．

(ii) $\Longrightarrow$ (iv)．任意の $x\in\mathcal{H}$ と $\varepsilon>0$ に対して，$\|x-\sum_{n=1}^{N}c_n e_n\|<\varepsilon$ とできる．このとき

$$\begin{aligned}
&\left\|x-\sum_{n=1}^{N}c_n e_n\right\|^2\\
&=\left\|x-\sum_{n=1}^{N}\langle x,e_n\rangle e_n+\sum_{n=1}^{N}(\langle x,e_n\rangle-c_n)e_n\right\|^2\\
&=\left\|x-\sum_{n=1}^{N}\langle x,e_n\rangle e_n\right\|^2+\left\|\sum_{n=1}^{N}(\langle x,e_n\rangle-c_n)e_n\right\|^2\\
&\qquad+2\,\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{N}\overline{(\langle x,e_m\rangle-c_m)}\left\langle x-\sum_{n=1}^{N}\langle x,e_n\rangle e_n, e_m\right\rangle\\
&=\left\|x-\sum_{n=1}^{N}\langle x,e_n\rangle e_n\right\|^2+\left\|\sum_{n=1}^{N}(\langle x,e_n\rangle-c_n)e_n\right\|^2\\
&\geq\left\|x-\sum_{n=1}^{N}\langle x,e_n\rangle e_n\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{n=1}^{N}|\langle x,e_n\rangle|^2.
\end{aligned}$$

上で最後の等号は命題 1.1.11 (2) による．したがって

$$\|x\|^2\leq\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2+\varepsilon^2.$$

$\varepsilon>0$ は任意だから $\|x\|^2\leq\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2$．ベッセルの不等式と合わせて等号を得る．

(iv) $\Longrightarrow$ (v).

$$\begin{aligned}
&||x||^2 - 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + ||y||^2 \\
&\quad = ||x-y||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x-y, e_n\rangle|^2 \\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty}(\langle x, e_n\rangle - \langle y, e_n\rangle)\overline{(\langle x, e_n\rangle - \langle y, e_n\rangle)} \\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 - 2\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle\overline{\langle y, e_n\rangle} + \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, e_n\rangle|^2 \\
&\quad = ||x||^2 - 2\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle + ||y||^2
\end{aligned}$$

であるから

$$\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle.$$

また

$$\mathrm{Im}\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\langle x, iy\rangle = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle\langle e_n, iy\rangle = \mathrm{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle.$$

よって $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle$.

(v) $\Longrightarrow$ (i). すべての n に対して $\langle x, e_n\rangle = 0$ とすると

$$||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle\langle e_n, x\rangle = 0$$

だから $x = 0$. ■

例 1.1.14 $\mathcal{H} = L^2([0, 2\pi])$ を測度 $dt/2\pi$ (dt はルベーグ測度) に関するヒルベルト空間とする (例 1.1.8 (3)). $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が ONS であることは簡単な積分計算で示せる. $[0, 2\pi]$ 上の複素数値連続関数の全体 $C([0, 2\pi])$ はノルム $||f|| = \sup_{0\le t\le 2\pi} |f(t)|$ によりバナッハ空間になる. このとき

1° $\{f \in C([0, 2\pi]) : f(0) = f(2\pi)\}$ は $L^2([0, 2\pi])$ で L^2-ノルムに関して稠密である.

2° 3 角多項式 (i.e. $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の 1 次結合) の全体は $\{f \in C([0, 2\pi]) : f(0) = f(2\pi)\}$ でノルム $||f||$ に関して稠密である.

2° はストーン-ワイエルシュトラスの定理の適用例 (付録の系 A.4.6 (3)) である．1° はルベーグ測度の性質から導かれる (付録の補題 A.2.4)．1° と 2° より $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が $L^2([0,2\pi])$ の CONS となる．$f \in L^2([0,2\pi])$ に対して，フーリエ係数 $\hat{f}(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ を

$$\hat{f}(n) = \langle f, e^{int} \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\frac{dt}{2\pi}$$

と定めると，前定理より

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int} \quad (L^2\text{-ノルムで収束}),$$

$$||f||_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

が成立する．

稠密な可算部分集合をもつ位相空間は**可分**と呼ばれる．ヒルベルト空間の可分性について次が成立する．

命題 1.1.15　次は同値：

(i) $\mathcal{H}$ が可分；

(ii) $\mathcal{H}$ が高々可算個からなる CONS をもつ．

証明　(i) $\Longrightarrow$ (ii). $\mathcal{H}$ が稠密な可算部分集合 $\{x_n\}$ をもつとする．各 n について，x_n が x_k $(k < n)$ の1次結合で書けるとき x_n をとり除く．このようにして得られる $\{x_n\}$ の (有限または無限) 部分列を改めて $\{x_n\}$ で表す．このとき，$\{x_n\}$ が1次独立だから，これにグラム-シュミットの直交化を行うと，ONS $\{e_n\}$ が得られる．$\{e_n\}$ の1次結合全体が $\{x_n\}$ のそれと一致し，それゆえ $\mathcal{H}$ で稠密である．よって定理 1.1.13 より $\{e_n\}$ は CONS である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i). $\{e_n\}$ を $\mathcal{H}$ の高々可算個の CONS とする．

$$D = \left\{ \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n : \alpha_n \ (1 \le n \le N) \text{ が有理複素数}, N \in \mathbb{N} \right\}$$

(有限列 $\{e_1, \ldots, e_N\}$ のときは N を固定) とすると，D が可算集合であることは容易に確かめられる．また，定理 1.1.13 より D は $\mathcal{H}$ で稠密である．よって $\mathcal{H}$ は可分．■

注意 1.1.16 (1) 任意のヒルベルト空間において CONS は存在する．可分なヒルベルト空間については命題 1.1.15 で示した．可分でないヒルベルト空間はツォルンの補題を用いて証明することができる．

(2) 定理 1.1.13 は可算個とは限らない任意の ONS $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対しても成立する．ただし $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について，$\mathcal{F}=\{J\subset\Lambda:$ 有限集合 $\}$ を包含関係の順序による有向集合としてネット $\{\sum_{\lambda\in J}x_\lambda\}_{J\in\mathcal{F}}$ が $x\in\mathcal{H}$ にノルム収束するとき，$x=\sum_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda$ とする．

(3) $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ を $\mathcal{H}$ の CONS とするとき，$|\Lambda|=|\Gamma|$ が示せる．ただし，$|\Lambda|$ は Λ の濃度を表す．そこで $\dim\mathcal{H}=|\Lambda|$ とおき $\mathcal{H}$ の**次元**という．命題 1.1.15 は，$\mathcal{H}$ が可分 $\Longleftrightarrow \dim\mathcal{H}\le\aleph_0$ を意味する．

1.2　有界線型作用素と有界線型汎関数

この節では，断らない限り，X,Y はノルム空間とし，$\mathcal{H}$ はヒルベルト空間とする．

定義 1.2.1 写像 $T:X\to Y$ がすべての $x,y\in X$ と $\alpha\in\mathbb{K}$ に対して

$$T(x+y)=Tx+Ty,\qquad T(\alpha x)=\alpha Tx$$

を満たすとき，T を**線型作用素**または**線型写像**という．さらに

$$||Tx||\le M||x||,\qquad x\in X$$

となる $M\ge 0$ が存在するとき，T は**有界**という．このとき，T のノルム $||T||$ を

$$||T||=\inf\{M\ge 0:||Tx||\le M||x||,\ x\in X\}\tag{1.6}$$

と定める．$||Tx||\le||T||\,||x||$ $(x\in X)$ が成立する．有界線型作用素を単に**有界作用素**と呼ぶことが多い．上で $Y=(\mathbb{K},|\cdot|)$ のとき，線型な $f:X\to\mathbb{K}$ を**線型汎関数**という．これが有界のとき，ノルム $||f||$ は

$$||f||=\inf\{M\ge 0:|f(x)|\le M||x||,\ x\in X\}.$$

命題 1.2.2 線型作用素 $T:X\to Y$ について次は同値：

(i) T が有界；

(ii) T が X 上で連続；

(iii) T が $x=0$ で連続．

証明　(i) $\Longrightarrow$ (ii). $x_0 \in X$ を任意に固定する．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon/(||T||+1)$ とおくと，$||x - x_0|| < \delta$ ならば

$$||Tx - Tx_0|| = ||T(x - x_0)|| \le ||T||\,||x - x_0|| < \varepsilon.$$

よって T は X 上で連続．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) は明らか．

(iii) $\Longrightarrow$ (i). T が有界でないとすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in X$ がとれて $||Tx_n|| > n||x_n||$. このとき $x_n \ne 0$ だから，$y_n = x_n/(n||x_n||)$ とおけば $||y_n|| = 1/n \to 0$. T の 0 での連続性より $||Ty_n|| \to 0$ となるが，他方 $||Ty_n|| = ||Tx_n||/(n||x_n||) > 1$ であり矛盾． ■

命題 1.2.3　有界線型作用素 $T : X \to Y$ のノルムについて

$$||T|| = \sup_{||x|| \le 1} ||Tx|| = \sup_{||x||=1} ||Tx|| = \sup_{x \ne 0} \frac{||Tx||}{||x||}.$$

証明　$T = 0$ のときは明らかなので，$T \ne 0$ とする．$||Tx|| \le ||T||\,||x||$ がすべての $x \in X$ で成立するから

$$\sup_{||x||=1} ||Tx|| \le \sup_{||x|| \le 1} ||Tx|| \le ||T||. \tag{1.7}$$

任意の $0 < \alpha < ||T||$ に対して $||Ty|| > \alpha||y||$ となる y がとれる．このとき，$y \ne 0$ だから $x = y/||y||$ とおくと，$||x|| = 1$ で $||Tx|| = ||Ty||/||y|| > \alpha$. したがって

$$\sup_{||x||=1} ||Tx|| \ge ||T||. \tag{1.8}$$

(1.7), (1.8) より第 1 と第 2 の等式が従う．$x \ne 0$ のとき $||Tx||/||x|| = ||T(x/||x||)||$ だから第 3 式も成立． ■

定義 1.2.4　(1) X から Y への有界線型作用素の全体を $\mathcal{B}(X,Y)$ で表す．特に $Y = X$ のとき，$\mathcal{B}(X,X)$ を単に $\mathcal{B}(X)$ で表す．さらに $Y = \mathbb{K}$ のとき，$X^* = \mathcal{B}(X,\mathbb{K})$, すなわち

$$X^* = \{f : f \text{ は } X \text{ 上の有界線型汎関数}\}$$

とおき，X^* を X の**双対空間**または**共役空間**という．

(2) $S, T \in \mathcal{B}(X,Y)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ のとき，和 $S+T$ とスカラー倍 αS を

$$(S+T)x = Sx + Tx, \quad (\alpha S)x = \alpha(Sx), \qquad x \in X$$

と定義する．さらに，$S, T \in \mathcal{B}(X)$ に対して，積 ST を

$$(ST)x = S(Tx), \qquad x \in X$$

と定義する．

命題 1.2.5 $\mathcal{B}(X,Y)$ に (1.6) のノルムを入れる．
(1) $(\mathcal{B}(X,Y), ||\cdot||)$ はノルム空間である．
(2) Y がバナッハ空間のとき，$(\mathcal{B}(X,Y), ||\cdot||)$ はバナッハ空間である．
(3) $S, T \in \mathcal{B}(X)$ に対して $||ST|| \le ||S||\,||T||$.

証明 (1) ノルムの最初の性質は明らか．

$$||(S+T)x|| \le ||Sx|| + ||Tx|| \le (||S|| + ||T||)||x||$$

より $||S+T|| \le ||S|| + ||T||$.

$$||(\alpha S)x|| = |\alpha|\,||Sx|| \le |\alpha|\,||S||\,||x||$$

より $||\alpha S|| \le |\alpha|\,||S||$. さらに $\alpha \ne 0$ のとき，$||S|| = ||\alpha^{-1}\alpha S|| \le |\alpha|^{-1}||\alpha S||$ だから $||\alpha S|| \ge |\alpha|\,||S||$. よって $||\alpha S|| = |\alpha|\,||S||$. これは $\alpha = 0$ のときは明らか．したがって $||\cdot||$ は $\mathcal{B}(X,Y)$ のノルムである．

(2) $\{T_n\} \subset \mathcal{B}(X,Y)$ をコーシー列，すなわち $||T_m - T_n|| \to 0$ $(m, n \to \infty)$ とする．任意の $x \in X$ に対して，$||T_m x - T_n x|| \le ||T_n - T_m||\,||x|| \to 0$ だから，$\{T_n x\}$ は Y のコーシー列になる．Y の完備性より $||T_n x - Tx|| \to 0$ となる $Tx \in Y$ が存在する．これで写像 $T: X \to Y$ が定まる．$T \in \mathcal{B}(X,Y)$ かつ $||T_n - T|| \to 0$ を示す．T の線型性は

$$T(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} (T_n x + T_n y) = Tx + Ty,$$

$$T(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} \alpha(T_n x) = \alpha(Tx).$$

$\varepsilon > 0$ を任意にとると，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $||T_m - T_n|| < \varepsilon$ $(m, n \ge n_0)$. このとき，任意の $x \in X$ に対して $||T_m x - T_n x|| \le \varepsilon ||x||$. ここで $m \to \infty$

とすれば $\|(T-T_n)x\| \le \varepsilon\|x\|$. したがって $T-T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ となるから $T=(T-T_n)+T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$. さらに，$\|T-T_n\| \le \varepsilon$ $(n \ge n_0)$ となり $\|T-T_n\| \to 0$. よって $\mathcal{B}(X,Y)$ はバナッハ空間になる.

(3) $\|(ST)x\| = \|S(Tx)\| \le \|S\|\,\|Tx\| \le \|S\|\,\|T\|\,\|x\|$ より成立. ■

前命題の (2) で $Y=(\mathbb{K},|\cdot|)$ とすれば，ノルム空間 X の双対空間 X^* はバナッハ空間である.

Y が X の線型部分空間のとき，X に同値関係 $x \sim y \iff x-y \in Y$ を定め，$x \in X$ の同値類 $x+Y$ を $[x]$ で表す. このとき，$x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して，和 $[x]+[y]=[x+y]$ とスカラー倍 $\alpha[x]=[\alpha x]$ が定義できて，商空間 X/Y は線型空間になる.

命題 1.2.6　X をバナッハ空間とし，Y を X の閉部分空間とする. $[x] \in X/Y$ のノルムを

$$\|[x]\| = \inf\{\|x+y\| : y \in Y\}$$

と定めると，X/Y はバナッハ空間になる.

証明　明らかに $\|[x]\| \ge 0$. $\|[x]\| = 0$ とすると，$\{y_n\} \subset Y$ がとれて $\|x-y_n\| \to 0$. Y が閉だから $x \in Y$, i.e. $[x]=0$. $x_1, x_2 \in X$ に対して

$$\begin{aligned}\|[x_1]+[x_2]\| &= \inf\{\|x_1+x_2+y_1+y_2\| : y_1, y_2 \in Y\} \\ &\le \inf\{\|x_1+y_1\|+\|x_2+y_2\| : y_1, y_2 \in Y\} \\ &= \inf_{y_1 \in Y}\|x_1+y_1\| + \inf_{y_2 \in Y}\|x_2+y_2\| = \|[x_1]\|+\|[x_2]\|.\end{aligned}$$

$x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して，$\alpha \ne 0$ のとき

$$\begin{aligned}\|\alpha[x]\| &= \inf\{\|\alpha x+\alpha y\| : y \in Y\} \\ &= \inf\{|\alpha|\,\|x+y\| : y \in Y\} = |\alpha|\,\|[x]\|.\end{aligned}$$

$\alpha=0$ のときも，上は両辺 $=0$ で成立. ゆえに $(X/Y, \|\cdot\|)$ はノルム空間になる. 完備性を示すために，$\{[x_n]\} \subset X/Y$ をコーシー列とすると，部分列 $\{[x_{n_k}]\}$ を $\|[x_{n_{k+1}}]-[x_{n_k}]\| < 2^{-k}$ $(k \in \mathbb{N})$ のように選べる. このとき，各 k について $y_k \in Y$ がとれて $\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}+y_k\| < 2^{-k}$. $u_1=0$, $u_k=\sum_{m=1}^{k-1}(x_{n_{m+1}}-x_{n_m}+y_m)$ $(k>1)$ とおくと

$$\|u_l-u_k\| \le \sum_{m=k}^{l-1}\|x_{n_{m+1}}-x_{n_m}+y_m\| < \sum_{m=k}^{l-1}2^{-m} \to 0 \ \ (l>k\to\infty)$$

であるから，$u \in X$ が存在して $\|u_k - u\| \to 0$. $u_k + x_{n_1} = x_{n_k} + \sum_{m=1}^{k-1} y_m$ だから，$x = u + x_{n_1}$ とおいて

$$\left\| x_{n_k} - x + \sum_{m=1}^{k-1} y_m \right\| = \|u_k - u\| \to 0.$$

よって $\|[x_{n_k}] - [x]\| \to 0$ $(k \to \infty)$. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $\|[x_n] - [x_m]\| < \varepsilon/2$ $(n, m \geq n_0)$. $\|[x_{n_k}] - [x]\| < \varepsilon/2$ となる $k \geq n_0$ をとると，$n \geq n_0$ ならば

$$\|[x_n] - [x]\| \leq \|[x_n] - [x_{n_k}]\| + \|[x_{n_k}] - [x]\| < \varepsilon.$$

ゆえに $\|[x_n] - [x]\| \to 0$ となり，X/Y はバナッハ空間. ■

上の命題で与えた X/Y を**商バナッハ空間**といい，そのノルムを**商ノルム**という.

命題 1.2.7 有限次元のノルム空間はバナッハ空間である.

証明 ノルム空間 X は有限次元とし，X の線型空間としての基底 $\{v_1, \ldots, v_N\}$ をとる. まず，任意の $M > 0$ に対して

$$\sup\left\{ \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| : \left\| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_i \right\| \leq M \right\} < +\infty$$

を示す. これを否定すると，$\|y_n\| \leq M$ である $\{y_n\} \subset X$ が存在して $y_n = \sum_{i=1}^{N} \beta_i^{(n)} v_i$, $c_n = \sum_{i=1}^{N} |\beta_i^{(n)}| \to \infty$ $(n \to \infty)$. このとき，$\{\beta_i^{(n)}/c_n\}$ の部分列を順次選ぶことにより，部分列 $\{n_k\} \subset \{n\}$ がとれて，各 i について $\beta_i^{(n_k)}/c_{n_k} \to \beta_i$ $(k \to \infty)$. $\sum_{i=1}^{N} |\beta_i^{(n)}/c_n| = 1$ だから $\sum_{i=1}^{N} |\beta_i| = 1$. ところで

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i v_i = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{\beta_i^{(n_k)}}{c_{n_k}} v_i = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{c_{n_k}} y_{n_k} = 0.$$

よって $\beta_i = 0$ $(i = 1, \ldots, N)$ となり矛盾.

そこで $\{x_n\} \subset X$ をコーシー列とし，$x_n = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{(n)} v_i$ とする. $\{\|x_n\|\}$ は有界だから，上で示したことより $\{\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i^{(n)}|\}_{n=1}^{\infty}$ は有界となる. した

がって，部分列 $\{n_k\}$ が存在して，各 i について $\alpha_i^{(n_k)} \to \alpha_i$ $(k \to \infty)$. $x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_i$ とおくと

$$||x_{n_k} - x|| \leq \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i^{(n_k)} - \alpha_i| \, ||v_i|| \to 0.$$

このとき，前命題の証明の最後と同様にして $||x_n - x|| \to 0$. ゆえに X はバナッハ空間である．■

命題 1.2.8　X はバナッハ空間とし，Y, Z は X の線型部分空間とする．

(1) Y が有限次元ならば Y は閉部分空間．

(2) Y が閉部分空間で Z が有限次元ならば，$Y + Z$ は閉部分空間．

証明　(1) 命題 1.2.7 より Y はそれ自身で完備である．このとき，Y が閉であることは容易に示せる．

(2) 商写像 $Q : X \to X/Y$ (i.e. $Qx = [x]$) は明らかに線型であり，$||Qx|| \leq ||x||$ $(x \in X)$ である．命題 1.2.6 より X/Y はバナッハ空間であり，$Q(Z)$ は X/Y の有限次元の線型部分空間である．よって (1) より $Q(Z)$ は閉であり，それゆえ $Q^{-1}(Q(Z))$ は X の閉集合である．$Y + Z = Q^{-1}(Q(Z))$ だから結論を得る．■

線型写像 $T : X \to Y$ は，$||Tx|| = ||x||$ $(x \in X)$ を満たすとき，**等距離線型写像**と呼ばれる．全射の等距離線型写像 $T : X \to Y$ が存在するとき，X と Y は**等距離同型**という．X, Y が内積空間で $T : X \to Y$ が等距離線型写像のとき，(1.4) より $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ $(x, y \in X)$, すなわち T が内積を保存することがわかる．

X がノルム空間のとき，$X^{**} = (X^*)^*$ を X の**第 2 双対空間**という．各 $x \in X$ に対して $\hat{x} : X^* \to \mathbb{K}$ を $\hat{x}(f) = f(x)$ $(f \in X^*)$ と定める．明らかに $\hat{x}$ は線型汎関数であり，$|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leq ||f|| \, ||x||$. よって $\hat{x} \in X^{**}$ かつ $||\hat{x}|| \leq ||x||$. さらに次が成立．

命題 1.2.9　X がノルム空間のとき，上で定めた $x \in X \mapsto \hat{x} \in X^{**}$ は等距離線型写像である．よって X は自然に $X^{**} = (X^*)^*$ の部分空間とみなせる．

証明　$x \mapsto \hat{x}$ の線型性は明らか．任意の $x \in X$ について，ハーン-バナッハの拡張定理 (付録の系 A.1.7) より $||f|| = 1$ で $f(x) = ||x||$ となる $f \in X^*$

がとれるから，$||\hat{x}|| \geq ||x||$. 上で示した $||\hat{x}|| \leq ||x||$ と合わせて $||\hat{x}|| = ||x||$. よって $x \in X \mapsto \hat{x} \in X^{**}$ は等距離線型写像である．x と $\hat{x}$ を同一視すれば $X \subset X^{**}$ とみなせる． ■

上の $x \in X \mapsto \hat{x} \in X^{**}$ が全射のとき，X は**回帰的**という．このとき $X = X^{**}$ とみなせる．回帰的なノルム空間はバナッハ空間である．

次に示すように，すべての内積空間はそれを稠密に含むヒルベルト空間に拡大できる．

命題 1.2.10 任意の内積空間 $(X, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ に対して，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ と等距離線型写像 $\Phi : X \to \mathcal{H}$ で値域 $\Phi(X)$ が $\mathcal{H}$ で稠密となるものが存在する．さらに $(\mathcal{H}, \Phi)$ は次の意味で一意：$(\mathcal{H}', \Phi')$ も同じ性質をもつならば，等距離同型写像 $\Psi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ が存在して $\Psi \circ \Phi = \Phi'$.

証明 概略を述べる．X のコーシー列の全体を $\mathcal{X}$ とおき，$\mathcal{X}$ に同値関係 $(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n\to\infty} ||x_n - y_n|| = 0$ を入れる．商空間 $\mathcal{X}/\sim$ を $\mathcal{H}$ とおき，$(x_n) \in \mathcal{X}$ の同値類を $[x_n]$ で表す．和 $[x_n] + [y_n] = [x_n + y_n]$ とスカラー倍 $\alpha[x_n] = [\alpha x_n]$ が定義できて，$\mathcal{H}$ は線型空間になる．さらに $\mathcal{H}$ に内積 $\langle [x_n], [y_n] \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle$ が定義できる．この内積から入る距離が完備であることは，距離空間の完備化の場合と同様に示せる．$\Phi : X \to \mathcal{H}$ を $\Phi(x) = [x, x, x, \ldots]$ と定めると，Φ は等距離線型写像で $\Phi(X)$ は $\mathcal{H}$ で稠密となる．一意性は，等距離線型写像 $\Phi' \circ \Phi^{-1} : \Phi(X) \to \Phi'(X)$ が $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}'$ への等距離同型に拡張されることからわかる． ■

上の命題で，x と $\Phi(x)$ を同一視すれば，X を $\mathcal{H}$ の稠密部分空間とみなせる．この $\mathcal{H}$ を X の**完備化ヒルベルト空間**という．

線型空間 X の部分集合 K が**凸**であるとは

$$x, y \in K,\ 0 < \lambda < 1 \implies \lambda x + (1-\lambda) y \in K$$

となるときをいう．

定理 1.2.11 (最短距離定理) $\mathcal{K}$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の閉凸部分集合とするとき，任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$||x - y|| = d(x, \mathcal{K})\ \ (= \inf_{z \in \mathcal{K}} ||x - z||)$$

となる $y \in \mathcal{K}$ が一意的に存在する．

証明　$\alpha = d(x, \mathcal{K})$ とおき，点列 $\{y_n\} \subset \mathcal{K}$ を $||x - y_n|| \to \alpha$ となるようにとる．このとき

$$\begin{aligned} ||y_m - y_n||^2 &= ||(x - y_m) - (x - y_n)||^2 \\ &= 2(||x - y_m||^2 + ||x - y_n||^2) - ||(x - y_m) + (x - y_n)||^2 \\ &= 2(||x - y_m||^2 + ||x - y_n||^2) - 4\left|\left|x - \frac{y_m + y_n}{2}\right|\right|^2 \\ &\leq 2(||x - y_m||^2 + ||x - y_n||^2) - 4\alpha^2 \\ &\to 2(\alpha^2 + \alpha^2) - 4\alpha^2 = 0. \end{aligned}$$

上で 2 番目の等号は (1.3) による．また，不等号は $\mathcal{K}$ の凸性より $(y_m + y_n)/2 \in \mathcal{K}$ となることによる．したがって $||y_n - y_m|| \to 0$ だから，$\{y_n\}$ はコーシー列である．ヒルベルト空間の完備性より $y \in \mathcal{H}$ がとれて $||y_n - y|| \to 0$. さらに，$\mathcal{K}$ は閉だから $y \in \mathcal{K}$ で

$$||x - y|| = \lim_{n \to \infty} ||x - y_n|| = \alpha.$$

一意性を示すために，$y' \in \mathcal{K}$ も $||x - y'|| = \alpha$ を満たすとすると，上の計算と同様に

$$\begin{aligned} ||y - y'||^2 &= 2(||x - y||^2 + ||x - y'||^2) - 4\left|\left|x - \frac{y + y'}{2}\right|\right|^2 \\ &\leq 2(\alpha^2 + \alpha^2) - 4\alpha^2 = 0. \end{aligned}$$

よって $||y - y'|| = 0$ だから $y = y'$. ■

定義 1.2.12　任意の部分集合 $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ の**直交補空間** $\mathcal{K}^\perp$ を

$$\mathcal{K}^\perp = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0 \ (y \in \mathcal{K})\}$$

と定義する．$\mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ について，$x \perp y$ $(x \in \mathcal{K},\, y \in \mathcal{L})$ のとき $\mathcal{K} \perp \mathcal{L}$ と表す．これは $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}^\perp$ と同じことである．

命題 1.2.13　任意の $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ に対して $\mathcal{K}^\perp$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間である．

証明　$x, y \in \mathcal{K}^\perp$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ のとき，任意の $z \in \mathcal{K}$ に対して $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle = 0$ だから，$\alpha x + \beta y \in \mathcal{K}^\perp$. よって $\mathcal{K}^\perp$ は $\mathcal{H}$ の線型部分空間である．次に，$\mathcal{K}^\perp$ が $\mathcal{H}$ の閉集合であることを示す．$\{x_n\} \subset \mathcal{K}^\perp$, $||x_n - x|| \to 0$ とすると，$z \in \mathcal{K}$ に対して $\langle x, z \rangle = \lim_n \langle x_n, z \rangle = 0$ だから $x \in \mathcal{K}^\perp$. よって $\mathcal{K}^\perp$ は閉集合である．■

定理 1.2.14 (直交分解定理) $\mathcal{M}$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間とする．このとき，任意の $x \in \mathcal{H}$ は

$$x = y + z, \quad y \in \mathcal{M}, \quad z \in \mathcal{M}^{\perp}$$

と一意的に分解できる．

証明 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して，定理 1.2.11 より $||x - y|| = d(x, \mathcal{M})$ となる $y \in \mathcal{M}$ が存在する．ここで，$z = x - y$ とおいて $z \in \mathcal{M}^{\perp}$ を示す．$v \in \mathcal{M}$ とすると，$\alpha \in \mathbb{K}$ に対して $y + \alpha v \in \mathcal{M}$ だから

$$||z|| = ||x - y|| \leq ||x - (y + \alpha v)|| = ||z - \alpha v||.$$

したがって

$$||z||^2 \leq ||z - \alpha v||^2 = ||z||^2 - 2\mathrm{Re}\langle \alpha v, z \rangle + |\alpha|^2 ||v||^2$$

だから $2\mathrm{Re}\langle \alpha v, z \rangle \leq |\alpha|^2 ||v||^2$. 特に，$\varepsilon > 0$ に対して $\alpha = \varepsilon \langle z, v \rangle$ とおけば

$$|\langle z, v \rangle|^2 (2 - \varepsilon ||v||^2) \leq 0.$$

ε は任意だから $\langle z, v \rangle = 0$ となり $z \in \mathcal{M}^{\perp}$.

一意性を示すために

$$x = y + z = y' + z', \quad y, y' \in \mathcal{M}, \quad z, z' \in \mathcal{M}^{\perp}$$

とすると，$y - y' = z' - z$ であり $y - y' \in \mathcal{M}$, $z' - z \in \mathcal{M}^{\perp}$. $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp} = \{0\}$ だから $y = y'$ かつ $z = z'$ となる． ■

上の定理より，$\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{M}$ に対して，直交分解 $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$ が得られる．$\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ が $\mathcal{M} \supset \mathcal{N}$ のとき，$\mathcal{M}$ における $\mathcal{N}$ の直交補空間 $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}^{\perp}$ を $\mathcal{M} \ominus \mathcal{N}$ で表すことが多い．

系 1.2.15 $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ について次は同値：

(i) $\mathcal{M}$ が $\mathcal{H}$ の閉部分空間である；

(ii) $\mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M}$.

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii). $x \perp y$ $(x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{M}^{\perp})$ より $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^{\perp\perp}$ は一般に成立する．各 $x \in \mathcal{M}^{\perp\perp}$ に対して，$x = y + z$, $y \in \mathcal{M}$, $z \in \mathcal{M}^{\perp}$ と分解する．

$x, y \in \mathcal{M}^{\perp\perp}$ より $z = x - y \in \mathcal{M}^{\perp\perp}$ かつ $z \in \mathcal{M}^{\perp}$. よって $z = 0$ となり $x = y \in \mathcal{M}$. したがって $\mathcal{M}^{\perp\perp} \subset \mathcal{M}$ だから $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\perp\perp}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). 命題 1.2.13 より $\mathcal{M} = (\mathcal{M}^{\perp})^{\perp}$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間. ■

この系より，任意の部分集合 $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ に対して，$\mathcal{K}^{\perp\perp}$ は $\mathcal{K}$ で生成される $\mathcal{H}$ の閉部分空間 (つまり $\mathcal{K}$ の閉線型包) であることがわかる.

定理 1.2.16 (リースの表現定理)　任意の $f \in \mathcal{H}^*$ に対して

$$f(x) = \langle x, x_f \rangle, \qquad x \in \mathcal{H}$$

となる $x_f \in \mathcal{H}$ が一意的に存在する. このとき $||f|| = ||x_f||$.

証明　$f \in \mathcal{H}^*$ に対して $\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{H} : f(x) = 0\}$ とおくと，$\mathcal{M}$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間になる. $\mathcal{M} = \mathcal{H}$ のとき，$f = 0$ であり $x_f = 0$ でよい. $\mathcal{M} \neq \mathcal{H}$ のとき，定理 1.2.14 より $\mathcal{M}^{\perp} \neq \{0\}$ がわかる. $x_0 \in \mathcal{M}^{\perp} \setminus \{0\}$ をとると $f(x_0) \neq 0$. 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(x_0)} f(x_0) = 0$$

だから $x - (f(x)/f(x_0))x_0 \in \mathcal{M}$. よって

$$\left\langle x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0, x_0 \right\rangle = 0$$

となり

$$\langle x, x_0 \rangle = \frac{f(x)}{f(x_0)} ||x_0||^2.$$

したがって

$$f(x) = \left\langle x, \frac{\overline{f(x_0)}}{||x_0||^2} x_0 \right\rangle.$$

ここで $x_f = (\overline{f(x_0)}/||x_0||^2)x_0$ とすれば，$f(x) = \langle x, x_f \rangle$ がすべての $x \in \mathcal{H}$ に対して成立する. 一意性を示すために，$f(x) = \langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle$ $(x \in \mathcal{H})$ とする. $\langle x, y - z \rangle = 0$ で $x = y - z$ とおいて $y = z$. 最後に，ノルムについては

$$|f(x)| = |\langle x, x_f \rangle| \leq ||x|| \, ||x_f||$$

となるから $||f|| \leq ||x_f||$. また

$$||x_f||^2 = |\langle x_f, x_f \rangle| = |f(x_f)| \leq ||f||\,||x_f||$$

だから $||x_f|| \leq ||f||$. したがって $||f|| = ||x_f||$. ■

前定理より，$\Phi : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$ を $\Phi(f) = x_f$ と定めると，Φ は等距離同型写像となる．しかし Φ は線型でなく共役線型，つまり，$f, g \in \mathcal{H}^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$, $\Phi(\alpha f) = \overline{\alpha}\Phi(f)$.

定義 1.2.17 (1) ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が**再生核ヒルベルト空間**とは，$\mathcal{H}$ が空でないある集合 S 上の複素関数からなる空間であり，任意の $s \in S$ に対して $f \in \mathcal{H} \mapsto f(s) \in \mathbb{C}$ が連続 (i.e. 有界線型汎関数) であるときをいう．

(2) S を空でない集合とする．$K : S \times S \to \mathbb{C}$ が任意の $n \in \mathbb{N}$, $\{s_i\}_{i=1}^n \subset S$, $\{c_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$ に対して

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c}_j K(s_i, s_j) \geq 0$$

を満たすとき，K を**正定値核**という．このとき，K が**エルミート**，すなわち $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$ $(s, t \in S)$ となることは簡単に確かめられる．

$\mathcal{H}$ が S 上の関数からなる再生核ヒルベルト空間のとき，各 $s \in S$ に対して，定理 1.2.16 より $K_s \in \mathcal{H}$ が存在して $f(s) = \langle f, K_s \rangle$ $(f \in \mathcal{H})$. 特に $K_s(t) = \langle K_s, K_t \rangle$ $(s, t \in S)$. $K : S \times S \to \mathbb{C}$ を $K(s,t) = K_s(t)$ と定めると，$\{s_i\}_{i=1}^n \subset S$ と $\{c_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$ に対して

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c}_j K(s_i, s_j) = \left\| \sum_{i=1}^n c_i K_{s_i} \right\|^2 \geq 0.$$

よって K は正定値核となる．$f \in \{K_s : s \in S\}^\perp$ とすると，$f(s) = \langle f, K_s \rangle = 0$ $(s \in S)$ より $f = 0$. したがって $\mathcal{H}$ は $\{K_s : s \in S\}$ の閉線型包になる．この K を $\mathcal{H}$ の**再生核**という．逆に次が成立する．

定理 1.2.18 S を空でない集合とし，$K : S \times S \to \mathbb{C}$ を正定値核とすると，再生核 K をもつ再生核ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が一意に存在する．

証明　$K_s(t) = K(s,t)$ とおき，S 上の複素関数全体のなす線型空間 $\mathbb{C}^S$ において，$\{K_s : s \in S\}$ の線型包を X とする．$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i K_{s_i}$, $g = \sum_{j=1}^m \beta_j K_{t_j} \in X$ に対して

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \overline{\beta}_j K(s_i, t_j)$$

と定義する．これが f, g の表し方によらないことは

$$\langle f, g\rangle = \sum_{j=1}^m \overline{\beta}_j f(t_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{g(s_i)}$$

からわかる．上の式で $g = K_t$ とすると $\langle f, K_t\rangle = f(t)$ $(t \in S)$. 特に

$$\langle K_s, K_t\rangle = K_s(t) = K(s,t), \qquad s, t \in S. \tag{1.9}$$

$\langle f, f\rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha}_j K(s_i, s_j) \geq 0$ より，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は X 上の正定値双線型汎関数である．命題 1.1.4 の下で注意したことから

$$|f(t)|^2 = |\langle f, K_t\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle \langle K_t, K_t\rangle = \langle f, f\rangle K(t,t).$$

これより，$\langle f, f\rangle = 0 \Longrightarrow f(t) = 0$ $(t \in S)$, i.e. $f = 0$. よって $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は X 上の内積となる．命題 1.2.10 により $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を完備化したヒルベルト空間を $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ とする．$\Phi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^S$ を $\Phi(f)(t) = \langle f, K_t\rangle$ $(f \in \mathcal{H},\ t \in S)$ で定めると，Φ は単射線型写像である．このとき，(1.9) は $\Phi(K_s) = K_s$ $(s \in S)$ を意味する．f と $\Phi(f)$ を同一視して $\mathcal{H}$ を $\mathbb{C}^S$ の部分空間とみなすと，$\{K_s : s \in S\} \subset \mathcal{H}$ で $f(t) = \langle f, K_t\rangle$ $(f \in \mathcal{H},\ t \in S)$ である．したがって $\mathcal{H}$ は再生核 K をもつ再生核ヒルベルト空間になる．一意性は $\mathcal{H}$ が $\{K_s : s \in S\}$ の閉線型包になることから容易．■

上の定理で与えた再生核ヒルベルト空間を $\mathcal{H}(K)$ で表す．再生核ヒルベルト空間は解析学の分野で応用範囲が広い．実の正定値核の場合でも上と同様な結果が成立する (演習問題 1.10).

1.3　一様有界性定理, 開写像定理, 閉グラフ定理

この節で，バナッハ空間で成立する一連の重要な定理を証明する．位相空間 X について，X の部分集合の可算列 $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ で $\mathrm{int}(\overline{E_n}) = \emptyset$, $X = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$

となるものが存在するとき，X は**第 1 類**という．ただし int は開核を表す．第 1 類でない X は**第 2 類**という．

補題 1.3.1 (ベールのカテゴリー定理) 完備距離空間は第 2 類である．

証明 (X,d) を完備距離空間とする．X の閉集合の列 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\operatorname{int} F_n = \emptyset$ $(n \in \mathbb{N})$ のとき，$X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ を示せばよい．各 $x \in X$ と $r > 0$ に対して $B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ とおく．$x_0 \in X$ を任意にとり $\varepsilon_0 = 1$ とする．$\operatorname{int} F_1 = \emptyset$ だから $B_{\varepsilon_0}(x_0) \setminus F_1 \neq \emptyset$. $x_1 \in B_{\varepsilon_0}(x_0) \setminus F_1$ をとると，$\varepsilon_1 > 0$ が存在して

$$B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap F_1 = \emptyset, \qquad \overline{B_{\varepsilon_1}(x_1)} \subset B_{\varepsilon_0}(x_0).$$

このとき，$\operatorname{int} F_2 = \emptyset$ だから $B_{\varepsilon_1}(x_1) \setminus F_2 \neq \emptyset$. $x_2 \in B_{\varepsilon_1}(x_1) \setminus F_2$ をとると，$\varepsilon_2 > 0$ が存在して

$$B_{\varepsilon_2}(x_2) \cap F_2 = \emptyset, \qquad \overline{B_{\varepsilon_2}(x_2)} \subset B_{\varepsilon_1}(x_1).$$

以下同様にして $x_n \in X$ と $\varepsilon_n > 0$ を順次とることができる．ここで $\varepsilon_n \to 0$ とできる．$m \geq n$ ならば $x_m \in B_{\varepsilon_n}(x_n)$ であるから，$d(x_m, x_n) < \varepsilon_n \to 0$ $(m \geq n \to \infty)$ となり $\{x_n\}$ はコーシー列である．X は完備だから，$x_\infty \in X$ が存在して $d(x_n, x_\infty) \to 0$. ところで，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$m \geq n+1$ ならば $x_m \in B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})$ であるから

$$x_\infty \in \overline{B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})} \subset B_{\varepsilon_n}(x_n).$$

$B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap F_n = \emptyset$ だから $x_\infty \notin F_n$. ゆえに $x_\infty \in X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ で結論がいえた．■

バナッハ空間およびヒルベルト空間は完備だから次が従う．

系 1.3.2 バナッハ空間，ヒルベルト空間は第 2 類である．

定理 1.3.3 (一様有界性定理) X をバナッハ空間，Y をノルム空間とする．$\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(X,Y)$ について次は同値：

(i) 各 $x \in X$ に対して $\{Tx : T \in \mathcal{T}\}$ が Y で有界；

(ii) $\mathcal{T}$ が一様有界，i.e. $\sup\{\|T\| : T \in \mathcal{T}\} < +\infty$.

証明　(ii) $\Longrightarrow$ (i). $||Tx|| \leq ||T||\,||x||$ より明らか.

(i) $\Longrightarrow$ (ii).

$$F_n = \left\{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{T}} ||Tx|| \leq n\right\} = \bigcap_{T \in \mathcal{T}} \{x \in X : ||Tx|| \leq n\}$$

とおくと，$\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X の閉集合列で $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. 系 1.3.2 より，ある n_0 で $\mathrm{int}\, F_{n_0} \neq \emptyset$. したがって，$x_0 \in X$ と $\varepsilon > 0$ が存在して，$||x - x_0|| < \varepsilon$ ならば $x \in F_{n_0}$.

$$\alpha = n_0 + \sup_{T \in \mathcal{T}} ||Tx_0|| \ (< +\infty)$$

とおくと，任意の $x \in X$ $(x \neq 0)$ に対して

$$\left|\left|\left(x_0 + \frac{\varepsilon}{2||x||}x\right) - x_0\right|\right| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

だから $x_0 + (\varepsilon/2||x||)x \in F_{n_0}$. よって

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{2||x||}||Tx|| &= \left|\left|T\left(x_0 + \frac{\varepsilon}{2||x||}x\right) - Tx_0\right|\right| \\ &\leq \left|\left|T\left(x_0 + \frac{\varepsilon}{2||x||}x\right)\right|\right| + ||Tx_0|| \\ &\leq n_0 + ||Tx_0|| \leq \alpha\end{aligned}$$

となるから $||Tx|| \leq (2\alpha/\varepsilon)||x||$. これがすべての $x \in X$ と $T \in \mathcal{T}$ に対して成立するから，$\sup\{||T|| : T \in \mathcal{T}\} \leq 2\alpha/\varepsilon < +\infty$.　■

系 1.3.4　(1) X をバナッハ空間とし，$F \subset X^*$ とする．各 $x \in X$ に対して $\{|f(x)| : f \in F\}$ が有界ならば，$\sup\{||f|| : f \in F\} < +\infty$.

(2) X をノルム空間とし，$E \subset X$ とする．各 $f \in X^*$ に対して $\{|f(x)| : x \in E\}$ が有界ならば，$\sup\{||x|| : x \in E\} < +\infty$.

証明　(1) 定理 1.3.3 で $Y = \mathbb{K}$ とすればよい．

(2) $E \subset X \subset X^{**}$ (命題 1.2.9) だから，(1) で X の代わりに X^* を考えればよい．　■

定理 1.3.5 (開写像定理)　X, Y をバナッハ空間とする．$T \in \mathcal{B}(X, Y)$ が全射ならば，T は開写像，すなわち X の開集合を Y の開集合に写す．

証明 各 $r > 0$ に対して

$$B_r^X = \{x \in X : ||x|| < r\}, \qquad B_r^Y = \{y \in Y : ||y|| < r\}$$

とおく．T の線型性より，ある $\varepsilon > 0$ に対して $B_\varepsilon^Y \subset TB_1^X$ を示せば十分である．$X = \bigcup_{n=1}^\infty B_n^X$ より $Y = TX = \bigcup_{n=1}^\infty TB_n^X$ だから，系 1.3.2 より，ある n_0 で $\mathrm{int}(\overline{TB_{n_0}^X}) \neq \emptyset$. したがって $y_0 \in Y$ と $\delta > 0$ が存在して，$||y - y_0|| < \delta$ ならば $y \in \overline{TB_{n_0}^X}$. さらに T が全射だから，$Tx_0 = y_0$ となる $x_0 \in X$ がとれる．ここで $r_0 = n_0 + ||x_0||$ とおくと，$y \in B_\delta^Y$ ならば，$y + y_0 \in \overline{TB_{n_0}^X}$ となるから

$$y \in \overline{TB_{n_0}^X} - Tx_0 = \overline{T(B_{n_0}^X - x_0)} \subset \overline{TB_{r_0}^X} = r_0\overline{TB_1^X}.$$

よって $B_\delta^Y \subset r_0\overline{TB_1^X}$. したがって $\varepsilon = \delta/2r_0$ とおくと，$B_{\varepsilon/2^{n-1}}^Y \subset \overline{TB_{1/2^n}^X}$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ で成立．$y \in B_\varepsilon^Y$ とすると，$x_1 \in B_{1/2}^X$ がとれて $||y - Tx_1|| < \varepsilon/2$. $x_2 \in B_{1/2^2}^X$ がとれて $||y - (Tx_1 + Tx_2)|| < \varepsilon/2^2$. 以下同様にして，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_n \in B_{1/2^n}^X, \qquad \left\|y - \sum_{k=1}^n Tx_k\right\| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

となる $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ が選べる．このとき $\sum_{n=1}^\infty ||x_n|| < \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} = 1$ だから，$x = \sum_{n=1}^\infty x_n \in B_1^X$ が定まり

$$y = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n Tx_k = Tx \in TB_1^X.$$

ゆえに $B_\varepsilon^Y \subset TB_1^X$. ■

系 1.3.6 (バナッハの逆写像定理) X, Y がバナッハ空間で，$T \in \mathcal{B}(X, Y)$ が全単射ならば $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$.

証明 逆写像 $T^{-1} : Y \to X$ の線型性は簡単．上の定理より T は開写像であるが，これは T^{-1} が連続であることを意味する．よって命題 1.2.2 より $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$. ■

定義 1.3.7 $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ をノルム空間とする．

(1) 直和線型空間 $X \oplus Y = \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$ において

$$||(x,y)|| = ||x||_X + ||y||_Y$$

と定義すると，$(X \oplus Y, ||\cdot||)$ はノルム空間になる．これを X, Y の**直和ノルム空間**という．特に X, Y がともにバナッハ空間のとき，$(X \oplus Y, ||\cdot||)$ もバナッハ空間になる (演習問題 1.12)．これを**直和バナッハ空間**という．

(2) 線型作用素 $T : X \to Y$ に対して

$$G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\} \ (\subset X \oplus Y)$$

を T の**グラフ**という．

定理 1.3.8 (閉グラフ定理)　X, Y をバナッハ空間とする．線型作用素 $T : X \to Y$ について次は同値：

(i) $T \in \mathcal{B}(X, Y)$;

(ii) $G(T)$ が閉集合．

証明　(i) $\Longrightarrow$ (ii). $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ とし，$(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ (ノルム収束) とする．このとき $x_n \to x$ かつ $Tx_n \to y$. T が連続だから $Tx_n \to Tx$. よって $y = Tx$ となり，$(x, y) = (x, Tx) \in G(T)$. ゆえに $G(T)$ は閉集合．

(ii) $\Longrightarrow$ (i). まず，$G(T)$ が $X \oplus Y$ の線型部分空間であることに注意する．したがって $G(T)$ はバナッハ空間 $X \oplus Y$ の閉部分空間としてバナッハ空間になる．$P : G(T) \to X$ を $P(x, Tx) = x$ で定義すれば，P は明らかに線型かつ全単射．$||x|| \le ||(x, Tx)||$ だから $P \in \mathcal{B}(G(T), X)$. よって 系 1.3.6 より P^{-1} は有界．$P^{-1}x = (x, Tx)$ だから

$$||Tx|| \le ||(x, Tx)|| = ||P^{-1}x|| \le ||P^{-1}||\,||x||.$$

ゆえに T は有界．■

最後に，バナッハ空間における収束と位相に関する定義を与えておく．

定義 1.3.9　(1) バナッハ空間 X におけるネット $\{x_\alpha\}$ が $x_0 \in X$ にノルム収束 (i.e. $||x_\alpha - x_0|| \to 0$) するとき，$\{x_\alpha\}$ は x_0 に**強収束**するともいう．

(2) ネット $\{x_\alpha\} \subset X$ と $x_0 \in X$ について，任意の $f \in X^*$ に対して $f(x_\alpha - x) \to 0$ のとき，$\{x_\alpha\}$ は x_0 に**弱収束**するといい，$x_\alpha \xrightarrow{\text{w}} x_0$ と表

す．弱収束による X の位相を**弱位相**という．この位相に関する $x_0 \in X$ の基本近傍は

$$\mathcal{V}(x_0; f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) = \{x \in X : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon \, (i = 1, \ldots, n)\}$$

で与えられる．ここで，$n \in \mathbb{N}$, $\{f_i\}_{i=1}^n \subset X^*$, $\varepsilon > 0$ は任意とする．

(2) ネット $\{f_\alpha\} \subset X^*$ と $f_0 \in X^*$ について，任意の $x \in X$ に対して $(f_\alpha - f_0)(x) \to 0$ のとき，$\{f_\alpha\}$ は f_0 に**弱 $*$ 収束**するという．この収束による X^* の位相を**弱 $*$ 位相**という．

明らかに弱位相はノルム位相より弱い．X^* 上には弱 $*$ 位相と弱位相 (X^{**} から入る) が定まるが，X が回帰的でなければ，弱 $*$ 位相の方が弱位相より弱い．次の事実は有用である．

1° 点列 $\{x_n\} \subset X$ が弱収束するならば $\sup_n \|x_n\| < +\infty$. これは，任意の $f \in X^*$ に対して $\{f(x_n)\}$ が有界だから，系 1.3.4 より従う．

2° X^* の閉単位球 $\{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$ は弱 $*$ 位相でコンパクトである (**アラオグルの定理**).

特にヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ では，$x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{w}} x \iff \langle x_\alpha - x, y\rangle \to 0$ $(y \in \mathcal{H})$ であり，$\{x \in \mathcal{H} : \|x\| \leq 1\}$ は弱コンパクト (i.e. 弱位相でコンパクト).

演習問題 1

1. X を $\mathbb{C}$ 上の線型空間とし，$\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ を双線型汎関数とするとき，φ がエルミート $\iff \varphi(x, x) \in \mathbb{R}$ $(x \in X)$ を示せ．

2. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とするとき，例 1.1.8 (3) に述べたことを証明せよ．一般に $1 \leq p < \infty$ に対して，Ω 上の p-乗可積分関数 f (i.e. f は可測で $\int_\Omega |f|^p d\mu < +\infty$) の全体を $L^p(\Omega)$ で表す．また，Ω 上の可測関数 f で本質的有界 (i.e. 有限の α がとれて $|f(\omega)| \leq \alpha$ a.e.) なものの全体を $L^\infty(\Omega)$ で表す．L^p-ノルム $\|\cdot\|_p$ と本質的 sup-ノルム $\|\cdot\|_\infty$ を

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}, \qquad f \in L^p(\Omega),\ 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha \geq 0 : |f(\omega)| \leq \alpha \text{ a.e.}\}, \qquad f \in L^\infty(\Omega)$$

と定める．このとき次を証明せよ．

(1) $1 \leq p, q \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$ のとき，すべての $f \in L^p(\Omega)$ と $g \in L^q(\Omega)$ に対して $||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$ (**ヘルダーの不等式**).
(2) $1 \leq p \leq \infty$ のとき，すべての $f, g \in L^p(\Omega)$ に対して $||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$ (**ミンコフスキーの不等式**).
(3) $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$ および $L^\infty(\Omega)$ はバナッハ空間.

3. 例 1.1.14 で，$\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が $L^2([0,2\pi])$ の CONS であることを示せ．さらに，$C([0,2\pi])$ に $L^2([0,2\pi])$ の内積を入れたとき，$L^2([0,2\pi])$ が $C([0,2\pi])$ の完備化ヒルベルト空間であることを示せ.

4. 注意 1.1.16 の (1)–(3) で述べたことを証明せよ.

5. $\dim \mathcal{H} = \aleph_0$ のとき，定理 1.1.13 のフーリエ展開を用いて，$\mathcal{H}$ が ℓ^2 と等距離同型であることを証明せよ．さらに一般に，次元の等しい 2 つのヒルベルト空間は等距離同型であることを証明せよ.

6. X, Y をノルム空間とし，X は有限次元とする．このとき，任意の線型作用素 $T : X \to Y$ が有界であることを示せ.

7. X をバナッハ空間，Y をその閉部分空間，$Q : X \to X/Y$ を商写像とし，$Y^\perp = \{f \in X^* : f|Y = 0\}$ とおく．このとき次を示せ.
(1) $F \in (X/Y)^* \mapsto F \circ Q \in Y^\perp$ により $Y^\perp \cong (X/Y)^*$ (等距離同型).
(2) $[f] = f + Y^\perp \in X^*/Y^\perp \mapsto f|Y \in Y^*$ により $Y^* \cong X^*/Y^\perp$ (等距離同型).

8. ヒルベルト空間はバナッハ空間として回帰的であることを示せ.

9. 命題 1.2.10 の完全な証明を与えよ.

10. $K : S \times S \to \mathbb{R}$ のとき，K が正定値であることは次の条件と同値であることを示せ：K が対称，i.e. $K(s,t) = K(t,s)$ $(s, t \in S)$ かつ任意の $n \in \mathbb{N}$, $\{s_i\}_{i=1}^n \subset S$, $\{c_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ に対して $\sum_{i,j=1}^n c_i c_j K(s_i, s_j) \geq 0$. さらに，$K : S \times S \to \mathbb{R}$ が正定値核のとき，S 上の実関数からなり再生核 K をもつ実の再生核ヒルベルト空間が一意に存在することを証明せよ.

11. 正定値核 $K_1, K_2 : S \times S \to \mathbb{C}$ に対して，$K(s,t) = K_1(s,t)K_2(s,t)$ $(s, t \in S)$ と定めると，K も正定値核になる (**シューアの定理**)．言い換

えれば，$A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]$ が正定値の $n\times n$ 複素行列ならば，シューア積 (アダマール積ともいう) $A\circ B=[a_{ij}b_{ij}]$ が再び正定値である．これを証明せよ．

12. ノルム空間 X, Y の直和ノルム空間 $X\oplus Y$ がバナッハ空間であるための必要十分条件は，X, Y がともにバナッハ空間であることを証明せよ．

13. X, Y をノルム空間，$T: X\to Y$ を線型作用素とするとき，T のグラフ $G(T)$ が $X\oplus Y$ の線型部分空間であることを示せ．さらに，$G(T)$ が閉であることは次の条件と同値であることを示せ：$\{x_n\}\subset X$, $x_n\to 0$, $Tx_n\to y\in Y$ ならば $y=0$.

14. (1) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{H}$ が ONS ならば $x_n\xrightarrow{\mathrm{w}}0$ を示せ．
(2) $\mathcal{H}$ において，$x_n\xrightarrow{\mathrm{w}}x$ かつ $\|x_n\|\to\|x\|$ ならば $\|x_n-x\|\to 0$ を示せ．

15. 任意の有界な点列 $\{x_n\}\subset\mathcal{H}$ に対して，部分列 $\{x_{n_k}\}$ と $x\in\mathcal{H}$ が存在して $x_{n_k}\xrightarrow{\mathrm{w}}x$ となることを証明せよ．(ヒント：$\{x_n\}$ で生成される $\mathcal{H}$ の可分な閉部分空間の CONS $\{e_m\}$ をとり，数列 $\{\langle x_n, e_m\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ $(m=1,2,\ldots)$ に対角線論法を用いよ.)

16. ℓ^2 の部分集合 $\{(\xi_n):|\xi|\le 1/n\ (n\in\mathbb{N})\}$ がノルム位相でコンパクトであることを示せ．(この集合はヒルベルト立方体と呼ばれる.)

17. 1.3 節の最後で述べたアラオグルの定理を次の順序で証明せよ．
(1) X をバナッハ空間とし，各 $x\in X$ に対して $D_x=\{\alpha\in\mathbb{K}:|\alpha|\le\|x\|\}$ とすると，$\prod_{x\in X}D_x$ は直積位相でコンパクト空間である (チコノフの定理による)．
(2) $B^*=\{f\in X^*:\|f\|\le 1\}$ とし，$f\in B^*$ に対して $\psi(f)\in\prod_{x\in X}D_x$ を $\psi(f)=(f(x))_{x\in X}$ と定めると，$\psi(B^*)$ は $\prod_{x\in X}D_x$ の閉部分集合である．
(3) B^* に弱 $*$ 位相，$\psi(B^*)$ に $\prod_{x\in X}D_x$ の相対位相を考えたとき，$\psi: B^*\to\psi(B^*)$ は位相同型写像である．

18. バナッハ空間 X が回帰的であるための必要十分条件は，閉単位球 $\{x\in X:\|x\|\le 1\}$ が弱位相でコンパクトであることを証明せよ．

第 2 章

ヒルベルト空間上の線型作用素

この章では，ヒルベルト空間上の線型作用素に関する一般的な事柄をまとめてある．ヒルベルト空間が有限次元のとき，線型作用素は行列で表現できる．したがって，ヒルベルト空間上の線型作用素の理論は無限次元の行列論と見ることもできる．2.1 節で，ヒルベルト空間上の有界作用素に対して共役作用素の概念を導入した後，自己共役作用素，正規作用素，等距離作用素，ユニタリー作用素，射影作用素などの基本的なものをとり挙げて説明する．2.2 節で，有界作用素の極分解について解説する．そのためにまず，正定値の有界作用素の平方根と部分等距離作用素について論じる．極分解は，複素数の極座標表示 $\zeta = re^{i\theta}$ の作用素版であり，作用素論において極めて有用なものである．2.3 節で，定義域がヒルベルト空間全体でなく，ある線型部分空間である非有界線型作用素について説明する．微分方程式や数理物理学などに現れる作用素は非有界なものが多いので，非有界作用素は応用の立場からも重要である．しかし，第 2, 3 章のうち 2.3 節と 3.3 節をとばしても，第 4 章以降を読むことができる．

2.1 基本的な有界作用素

この節では，ヒルベルト空間上の有界線型作用素について基本的な事項を説明する．

定義 2.1.1 X, Y をノルム空間とする．$T \in \mathcal{B}(X, Y)$ に対して

$$\ker T = \{x \in X : Tx = 0\}$$

とおき，T の**核**または**零空間**という．

$$\operatorname{ran} T = \{Tx : x \in X\}$$

とおき，T の**値域**という．さらに

$$\overline{\operatorname{ran}}\, T = \overline{\operatorname{ran} T} \ \ (T \text{ の値域の閉包})$$

と表す．

$T \in \mathcal{B}(X, Y)$ のとき，$\ker T$ は X の閉部分空間である．$\operatorname{ran} T$ が Y の線型部分空間だから，$\overline{\operatorname{ran}}\, T$ は Y の閉部分空間である．

定義 2.1.2 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について，$AB = BA = I$ となる $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在するとき，A は**可逆**という．ただし I は $\mathcal{H}$ 上の恒等写像を表す．この B (一意に定まる) を A^{-1} で表し，A の**逆作用素**または単に**逆**という．

任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，(1.4) と同様に

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \frac{1}{4}\{\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle \\ &\qquad + i\langle A(x+iy), x+iy\rangle - i\langle A(x-iy), x-iy\rangle\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

が成立する．この等式より次が従う．

補題 2.1.3 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ のとき

$$A = 0 \Longleftrightarrow \langle Ax, x\rangle = 0 \ (x \in \mathcal{H}).$$

補題 2.1.4 $\varphi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ を双線型汎関数とする．φ が有界，すなわち $M \geq 0$ がとれて $|\varphi(x, y)| \leq M\|x\|\,\|y\|$ $(x, y \in \mathcal{H})$ となるとき

$$\varphi(x, y) = \langle Bx, y\rangle, \qquad x, y \in \mathcal{H}$$

を満たす $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が一意的に存在する．

証明 $x \in \mathcal{H}$ を任意に固定し，$f(y) = \overline{\varphi(x, y)}$ とする．f は $\mathcal{H}$ 上の線型汎関数である．$|f(y)| = |\varphi(x, y)| \leq M\|x\|\,\|y\|$ より f は有界であるから，定理 1.2.16 より $Bx \in \mathcal{H}$ が一意に存在して $f(y) = \langle y, Bx\rangle$ $(y \in \mathcal{H})$. よって

$$\varphi(x, y) = \overline{\langle y, Bx\rangle} = \langle Bx, y\rangle, \qquad y \in \mathcal{H}.$$

また $||Bx|| = ||f|| \leq M||x||$. 任意の $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ と $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} \langle B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), y\rangle &= \varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) \\ &= \alpha_1 \varphi(x_1, y) + \alpha_2 \varphi(x_2, y) \\ &= \langle \alpha_1 B x_1 + \alpha_2 B x_2, y\rangle \end{aligned}$$

だから $B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Bx_1 + \alpha_2 Bx_2$. したがって $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が示せた．一意性は容易である． ■

任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，$\varphi(x, y) = \langle x, Ay\rangle$ は $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ 上の双線型汎関数である．$|\langle x, Ay\rangle| \leq ||A||\,||x||\,||y||$ より φ は有界だから，上の補題より，$A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が一意に存在して $\varphi(x, y) = \langle A^* x, y\rangle$. このとき

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle, \qquad x, y \in \mathcal{H}.$$

この A^* を A の**共役作用素**または**随伴作用素**という．補題の証明から

$$||A^* x|| \leq ||A||\,||x||, \qquad x \in \mathcal{H}. \tag{2.2}$$

命題 2.1.5 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\alpha \in \mathbb{C}$ とする．

(1) $(A + B)^* = A^* + B^*$.

(2) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.

(3) $(AB)^* = B^* A^*$.

(4) $(A^*)^* = A$.

(5) A が可逆ならば，A^* も可逆で $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

(6) $||A^*|| = ||A||$.

(7) $||A^* A|| = ||A||^2$.

証明 (1)–(4) は演習問題とする．

(5) $(A^{-1})^* A^* = (AA^{-1})^* = I^* = I$ かつ $A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I$. よって A^* は可逆で $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

(6) (2.2) より $||A^*|| \leq ||A||$. また $||A|| = ||A^{**}|| \leq ||A^*||$. よって $||A|| = ||A^*||$.

(7) (6) より $||A^* A|| \leq ||A^*||\,||A|| = ||A||^2$. 他方，任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$||Ax||^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^* Ax, x\rangle \leq ||A^* Ax||\,||x|| \leq ||A^* A||\,||x||^2.$$

これより $||A||^2 \leq ||A^* A||$. よって $||A^* A|| = ||A||^2$. ■

命題 2.1.6 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$\ker A = (\operatorname{ran} A^*)^\perp, \qquad \overline{\operatorname{ran}}\, A = (\ker A^*)^\perp.$$

証明

$$\begin{aligned} x \in \ker A &\iff Ax = 0 \\ &\iff \langle Ax, y\rangle = 0 \ \ (y \in \mathcal{H}) \\ &\iff \langle x, A^* y\rangle = 0 \ \ (y \in \mathcal{H}) \\ &\iff x \in (\operatorname{ran} A^*)^\perp. \end{aligned}$$

よって $\ker A = (\operatorname{ran} A^*)^\perp$. A を A^* で置き換えれば, $\ker A^* = (\operatorname{ran} A^{**})^\perp = (\operatorname{ran} A)^\perp$. したがって $(\ker A^*)^\perp = (\operatorname{ran} A)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{ran}}\, A$. ■

ここで, 有限次元ヒルベルト空間上の線型作用素について整理しておく.

命題 2.1.7 $\dim \mathcal{H} = n < +\infty$ とし, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ を $\mathcal{H}$ の正規直交基底とする. また $M_n(\mathbb{C})$ を $n \times n$ 複素行列の全体とする. 各 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して $\Phi(A) \in M_n(\mathbb{C})$ を

$$\Phi(A) = [\langle Ae_j, e_i\rangle]_{i,j=1}^n$$

で与える. このとき, $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to M_n(\mathbb{C})$ は $*$-同型写像, つまり全単射線型写像で $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$, $\Phi(A^*) = \Phi(A)^*$ を満たす. ただし $M_n(\mathbb{C})$ の $*$-演算は随伴行列をとる.

証明 Φ の線型性は明らか. $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して $\Phi(A) = [a_{ij}]$, $\Phi(B) = [b_{ij}]$ とおくと

$$Ae_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i, \qquad Be_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} e_i.$$

よって

$$(AB)e_j = A\left(\sum_{k=1}^n b_{kj} e_k\right) = \sum_{k=1}^n b_{kj} \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} e_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}\right) e_i$$

となるから $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$. また

$$\Phi(A^*) = [\langle A^* e_j, e_i\rangle] = [\langle e_j, Ae_i\rangle] = [\overline{a}_{ji}] = \Phi(A)^*.$$

Φ が単射であることは容易．任意の $[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$Ax = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\right)e_i, \qquad x = \sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j \in \mathcal{H}$$

により，$\mathcal{H}$ 上の線型作用素 A が定まる．$\mathbb{C}^n$ でのシュワルツの不等式より

$$\begin{aligned} ||Ax||^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2\right) \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)||x||^2. \end{aligned}$$

よって $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. (これは $\mathcal{H}$ が有限次元だから，演習問題 1.6 からもわかる.) $\Phi(A) = [a_{ij}]$ だから Φ は全射．■

上の $\Phi(A) = [a_{ij}]$ を基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ による A の行列表現という．上の証明で $||A|| \leq (\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2)^{1/2}$ を示した．$\mathcal{H}$ と $\mathbb{C}^n$ の間の同型対応 $x \longleftrightarrow (\xi_i)$ を $x = \sum_{i=1}^{n}\xi_n e_i$ で定めると

$$Ax \longleftrightarrow (\eta_i), \qquad \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

となり，A は通常の行列の線型変換と対応する．以上より有限次元空間上の線型作用素に関するすべての事柄が行列に帰着される．

以下，再び $\mathcal{H}$ は一般のヒルベルト空間として，いくつかの基本的な有界作用素を定義しよう．

定義 2.1.8　$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする．

(1) $A = A^*$ のとき A は**自己共役**または**エルミート**という．

(2) A と A^* が可換，i.e. $A^*A = AA^*$ となるとき A は**正規**という．

(3) すべての $x \in \mathcal{H}$ に対して $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ となるとき，A は**正定値**または単に**正**といい，$A \geq 0$ と表す．

(4) すべての $x \in \mathcal{H}$ に対して $||Ax|| = ||x||$ となるとき，A を**等距離作用素**という．

(5) $A^*A = AA^* = I$, i.e. $A^* = A^{-1}$ のとき A を**ユニタリー作用素**または単に**ユニタリー**という．

命題 2.1.9 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について次は同値：

(i) A が自己共役；

(ii) 任意の $x, y \in \mathcal{H}$ に対して $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$;

(iii) 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) は明らか.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}$ より $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$\langle Ax, x\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \overline{\langle x, A^*x\rangle} = \langle A^*x, x\rangle$$

だから $\langle (A - A^*)x, x\rangle = 0$. 補題 2.1.3 より $A = A^*$. ■

補題 2.1.10 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は，自己共役な $B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ により $A = B + iC$ と一意的に分解される.

証明 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$B = \frac{A + A^*}{2}, \qquad C = \frac{A - A^*}{2i} \tag{2.3}$$

とおくと，B, C は自己共役作用素で $A = B + iC$ である．逆に，自己共役な B, C で $A = B + iC$ とすると，$A^* = B - iC$ と連立させて (2.3) を得る. ■

上の分解 $A = B + iC$ を**デカルト分解**といい，B を A の**実部**，C を A の**虚部**といい，$B = \mathrm{Re}\, A$, $C = \mathrm{Im}\, A$ で表す.

命題 2.1.11 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について次は同値：

(i) A が正規；

(ii) 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して $\|Ax\| = \|A^*x\|$;

(iii) $A = B + iC$ をデカルト分解とすると $BC = CB$.

証明 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii). 補題 2.1.3 より

$$\begin{aligned} A^*A = AA^* \quad &\Longleftrightarrow \quad \langle A^*Ax, x\rangle = \langle AA^*x, x\rangle \ \ (x \in \mathcal{H}) \\ &\Longleftrightarrow \quad \|Ax\| = \|A^*x\| \ \ (x \in \mathcal{H}). \end{aligned}$$

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii). $A = B + iC$, $A^* = B - iC$ より

$$A^*A = B^2 + C^2 + i(BC - CB),$$

$$AA^* = B^2 + C^2 - i(BC - CB).$$

よって $A^*A = AA^* \Longleftrightarrow BC = CB$. ■

命題 2.1.12　$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする.

(1) $A^*A \geq 0$.

(2) $A \geq 0$ ならば A は自己共役.

(3) A が自己共役ならば A は正規.

証明　(1) $\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle \geq 0$.

(2) 命題 2.1.9 (iii) が成立するから.

(3) $A^*A = A^2 = AA^*$. ■

定義 2.1.13　自己共役な $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して, $\langle Ax, x\rangle \geq \langle Bx, x\rangle$ $(x \in \mathcal{H})$, i.e. $A - B \geq 0$ のとき $A \geq B$ と表す. これが $\{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : A = A^*\}$ における順序関係であることはすぐにわかる.

次の結果はかなり重要である.

命題 2.1.14　$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が自己共役ならば

$$||A|| = \sup_{||x|| \leq 1} |\langle Ax, x\rangle| = \sup_{||x||=1} |\langle Ax, x\rangle|. \tag{2.4}$$

証明　(2.4) の右辺を α とおく. $|\langle Ax, x\rangle| \leq ||A||\,||x||^2$ より

$$\alpha \leq \sup_{||x|| \leq 1} |\langle Ax, x\rangle| \leq ||A||.$$

逆向きを示す. まず $x \neq 0$ のとき

$$|\langle Ax, x\rangle| = ||x||^2 \left|\left\langle A\left(\frac{x}{||x||}\right), \frac{x}{||x||}\right\rangle\right| \leq \alpha ||x||^2.$$

この不等式は $x = 0$ でも成立. (2.1) と命題 2.1.9 (iii) より

$$\mathrm{Re}\langle Ax, y\rangle = \frac{1}{4}\{\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle\}.$$

よって

$$\begin{aligned}|\mathrm{Re}\langle Ax,y\rangle| &\le \frac{1}{4}\{|\langle A(x+y),x+y\rangle|+|\langle A(x-y),x-y\rangle|\}\\ &\le \frac{\alpha}{4}(||x+y||^2+||x-y||^2)\\ &= \frac{\alpha}{2}(||x||^2+||y||^2).\end{aligned}$$

上の等号は (1.3) による．$||x||\le 1$, $||y||\le 1$ とする．ある $\theta\in\mathbb{C}$ ($|\theta|=1$) で $|\langle Ax,y\rangle|=\theta\langle Ax,y\rangle$ と書けるから

$$\begin{aligned}|\langle Ax,y\rangle| &= \langle A(\theta x),y\rangle=\mathrm{Re}\langle A(\theta x),y\rangle\\ &\le \frac{\alpha}{2}(||\theta x||^2+||y||^2)\le\alpha.\end{aligned}$$

よって

$$||A||=\sup_{||x||\le 1}||Ax||=\sup_{||x||,\,||y||\le 1}|\langle Ax,y\rangle|\le\alpha.$$

したがって結論を得る． ■

注意 2.1.15 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，$w(A)=\sup_{||x||=1}|\langle Ax,x\rangle|$ とおき A の**数域半径**という．上で自己共役な A に対し $||A||=w(A)$ を示したが，この等式は正規作用素でも成立することを注意しておく．なお，演習問題 2.4 参照.

命題 2.1.16 $V\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ について次は同値：

(i) V が等距離作用素；

(ii) $V^*V=I$;

(iii) 任意の $x,y\in\mathcal{H}$ に対して $\langle Vx,Vy\rangle=\langle x,y\rangle$.

証明 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).

$$\begin{aligned}V^*V=I &\iff \langle V^*Vx,x\rangle=\langle x,x\rangle\ \ (x\in\mathcal{H})\\ &\iff ||Vx||=||x||\ \ (x\in\mathcal{H}).\end{aligned}$$

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii). 既に命題 1.2.8 の下で述べたように，(1.4) を用いてすぐに示せる． ■

命題 2.1.17　$U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について次は同値：

(i) U がユニタリー作用素；

(ii) U が等距離作用素で全射 (i.e. $\operatorname{ran} U = \mathcal{H}$);

(iii) U, U^* がともに等距離作用素．

証明　(i) $\Longrightarrow$ (ii). U がユニタリーとすると，命題 2.1.16 より U は等距離作用素．$x = U(U^*x)$ $(x \in \mathcal{H})$ より $\operatorname{ran} U = \mathcal{H}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). U が全射等距離作用素とすると，逆写像 U^{-1} が存在する．任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して $y = U^{-1}x$ とおくと，命題 2.1.16 より

$$U^{-1}x = y = U^*Uy = U^*x.$$

よって $U^* = U^{-1}$ だから U はユニタリー．

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii). 命題 2.1.16 より明らか．■

例 2.1.18　ヒルベルト空間 ℓ^2 上で

$$Vx = (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots), \qquad x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$$

と定義する．V は 明らかに線型で $\|Vx\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2)^{1/2} = \|x\|$ だから，V は等距離作用素である．$x = (\xi_n)$, $y = (\eta_n) \in \ell^2$ に対して

$$\langle V^*x, y \rangle = \langle x, Vy \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{n+1}\overline{\eta}_n.$$

よって $V^*x = (\xi_2, \xi_3, \ldots)$ となり，$VV^*x = (0, \xi_2, \xi_3, \ldots)$. ゆえに $VV^* \neq I$ だから，V はユニタリー作用素でない．この V を**片側シフト作用素**という．

定義 2.1.19　$\mathcal{M}$ を $\mathcal{H}$ の閉部分空間とするとき，任意の $x \in \mathcal{H}$ は $x = y + z$ $(y \in \mathcal{M},\ z \in \mathcal{M}^\perp)$ と一意的に分解できた (定理 1.2.14). $P_\mathcal{M} : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ を $P_\mathcal{M}x = y$ と定義する．$\|y\| \le \|x\|$ より，$P_\mathcal{M} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ で $\|P_\mathcal{M}\| \le 1$ である．この $P_\mathcal{M}$ を $\mathcal{M}$ 上への**射影作用素**または単に**射影**という．

上で定義した射影作用素 $P_\mathcal{M}$ について次は明らか：

1°　$x \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow P_\mathcal{M}x = x$,

2°　$x \in \mathcal{M}^\perp \Longleftrightarrow P_\mathcal{M}x = 0$,

3°　$P_{\mathcal{M}^\perp} = I - P_\mathcal{M}$.

命題 2.1.20　$P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について次は同値：

(i) $P = P_{\mathcal{M}}$ ($\mathcal{M}$ は $\mathcal{H}$ のある閉部分空間);

(ii) $P^* = P = P^2$.

このとき $\mathcal{M} = \operatorname{ran} P = \ker(I - P)$.

証明　(i) $\Longrightarrow$ (ii). $P = P_{\mathcal{M}}$ とする．$Px \in \mathcal{M}$ より $P^2x = Px$. よって $P^2 = P$. $x = y + z$ ($y \in \mathcal{M}$, $z \in \mathcal{M}^\perp$) のとき

$$\langle P^*x, x\rangle = \langle x, Px\rangle = \langle y + z, y\rangle = \langle y, y\rangle = \langle y, y + z\rangle = \langle Px, x\rangle$$

であるから，補題 2.1.3 より $P^* = P$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). $P = P^* = P^2$ として，$\mathcal{M} = \operatorname{ran} P$ とおく．$y \in \mathcal{M}$ ならば，ある $x \in \mathcal{H}$ で $y = Px$ だから $Py = P^2x = Px = y$. よって

$$\mathcal{M} = \{y \in \mathcal{H} : Py = y\} = \ker(I - P)$$

となり，$\mathcal{M}$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間である．$x = y + z$ ($y \in \mathcal{M}$, $z \in \mathcal{M}^\perp$) のとき $Px = Py + Pz = y + Pz$. 任意の $v \in \mathcal{H}$ に対して，$Pv \in \mathcal{M}$ より

$$\langle Pz, v\rangle = \langle z, P^*v\rangle = \langle z, Pv\rangle = 0.$$

よって $Pz = 0$ だから $Px = y = P_{\mathcal{M}}x$. ゆえに $P = P_{\mathcal{M}}$.

後半は既に示されている．■

したがって，$P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が射影作用素とは $P^* = P = P^2$ (自己共役かつべき等) であると定義してもよい．

命題 2.1.21　$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ を $\mathcal{H}$ の閉部分空間とし，$P = P_{\mathcal{M}}$, $Q = P_{\mathcal{N}}$ とする．このとき次は同値：

(i) $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$;

(ii) $PQ = 0$;

(iii) $QP = 0$;

(iv) $P + Q$ が射影作用素.

証明　(i) $\Longrightarrow$ (ii). $Qx \in \mathcal{N} \subset \mathcal{M}^\perp$ だから $PQx = 0$. よって $PQ = 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). 命題 2.1.20 より $QP = Q^*P^* = (PQ)^* = 0$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). $x \in \mathcal{M}$, i.e. $x = Px$ ならば，$Qx = QPx = 0$ だから $x \in \mathcal{N}^\perp$. よって $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$.

(i) $\Longrightarrow$ (iv). (ii), (iii) より $PQ = QP = 0$ だから

$$(P+Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 = P + Q.$$

また $(P+Q)^* = P+Q$. よって命題 2.1.20 より $P+Q$ は射影作用素.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). $P+Q$ が射影作用素ならば $||P+Q|| \le 1$. $x \in \mathcal{M}$ とすると

$$\begin{aligned} ||x||^2 &\ge ||(P+Q)x||^2 = ||x+Qx||^2 \\ &= ||x||^2 + \langle x, Qx\rangle + \langle Qx, x\rangle + ||Qx||^2 \\ &= ||x||^2 + 3||Qx||^2 \end{aligned}$$

となるから $Qx = 0$, i.e. $x \in \mathcal{N}^{\perp}$. よって $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$. ■

命題 2.1.22　前命題と同じ前提で次は同値：

(i) $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$;

(ii) $P \le Q$;

(iii) $PQ = P$;

(iv) $QP = P$;

(v) すべての $x \in \mathcal{H}$ に対して $||Px|| \le ||Qx||$.

証明　(i) $\Longrightarrow$ (iv). 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して，$Px \in \mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ だから $QPx = Px$. よって $QP = P$.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii). $PQ = P^*Q^* = (QP)^* = P^* = P$.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii). 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$\langle Px, x\rangle = ||Px||^2 = ||PQx||^2 \le ||Qx||^2 = \langle Qx, x\rangle.$$

よって $P \le Q$.

(ii) $\Longrightarrow$ (v). $||Px||^2 = \langle Px, x\rangle \le \langle Qx, x\rangle = ||Qx||^2$ だから $||Px|| \le ||Qx||$.

(v) $\Longrightarrow$ (i). $x \in \mathcal{M}$ のとき，$||x|| = ||Px|| \le ||Qx|| \le ||x||$ だから $||Qx|| = ||x||$. よって $||x - Qx||^2 = ||x||^2 - ||Qx||^2 = 0$ となるから $x = Qx \in \mathcal{N}$. したがって $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. ■

ここで，一般の有界作用素に戻って，作用素の間の優位関係についてのダグラスの結果を与えておこう．

定理 2.1.23 (ダグラスの定理) $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について次は同値：

(i) $\operatorname{ran} A \subset \operatorname{ran} B$;

(ii) $\alpha \geq 0$ が存在して $AA^* \leq \alpha BB^*$;

(iii) $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在して $A = BC$.

さらに，上の条件が成立するとき，(iii) の C として次の (1)–(3) を満たすものが一意に存在する．

(1) $||C||^2 = \inf\{\alpha : AA^* \leq \alpha BB^*\}$,

(2) $\ker A = \ker C$,

(3) $\operatorname{ran} C \subset (\ker B)^\perp$.

証明 (iii) $\Longrightarrow$ (i) は明らか．

(iii) $\Longrightarrow$ (ii). $A = BC$ ならば，$CC^* \leq ||C||^2 I$ (演習問題 2.3) より

$$AA^* = BCC^*B^* \leq ||C||^2 BB^*.$$

(i) $\Longrightarrow$ (iii). $\operatorname{ran} A \subset \operatorname{ran} B$ とする．直交分解 $\mathcal{H} = \ker B \oplus (\ker B)^\perp$ を考えれば，$B|(\ker B)^\perp : (\ker B)^\perp \to \operatorname{ran} B$ は全単射となることがわかる．よって任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して，$y \in (\ker B)^\perp$ が一意に存在して $Ax = By$. そこで $Cx = y$ とおくと $C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ が定まる．C の線型性と $A = BC$ は定義より明らかだから，$C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を示せばよい．これには，定理 1.3.8 より $G(C)$ が閉であることをいえばよい．$\{(x_n, y_n)\} \subset G(C)$ とし，$(x_n, y_n) \to (x, y)$, i.e. $x_n \to x$, $y_n \to y$ とする．このとき

$$By = \lim_n By_n = \lim_n Ax_n = Ax.$$

また $\{y_n\} \subset (\ker B)^\perp$ より $y \in (\ker B)^\perp$. したがって $Cx = y$ となり，$G(C)$ は閉である．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). $AA^* \leq \alpha BB^*$ とする．任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$||A^*x||^2 = \langle AA^*x, x\rangle \leq \alpha\langle BB^*x, x\rangle = \alpha||B^*x||^2.$$

これより $B^*x = B^*x' \Longrightarrow A^*x = A^*x'$ となるから，$D : \operatorname{ran} B^* \to \operatorname{ran} A^*$ を $D(B^*x) = A^*x$ と定めることができる．D が線型で，$||D(B^*x)|| \leq \alpha^{1/2}||B^*x||$ $(x \in \mathcal{H})$ だから，D は $\overline{\operatorname{ran}}\, B^*$ 上の有界作用素に拡張できる．さらに $(\operatorname{ran} B^*)^\perp$ 上で 0 とおくことにより，$D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が定まり $A^* = DB^*$. したがって $C = D^*$ とおいて $A = BC$.

次に，後半の部分を示す．$C = D^*$ を上の (ii) $\Longrightarrow$ (iii) の証明で構成したものとすると

$$||C||^2 = ||D||^2 \leq \inf\{\alpha : AA^* \leq \alpha BB^*\}.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) の証明と合わせて，(1) が得られる．命題 2.1.6 より

$$\ker C = (\operatorname{ran} D)^\perp = (\operatorname{ran} A^*)^\perp = \ker A$$

となり (2) が成立．さらに

$$\ker B = (\operatorname{ran} B^*)^\perp \subset \ker D = (\operatorname{ran} C)^\perp$$

となり (3) が成立．最後に，一意性を示すために，$C_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が $A = BC_1$ かつ $\operatorname{ran} C_1 \subset (\ker B)^\perp$ とする．$C_1^* B^* = A^*$ より $C_1^* B^* x = A^* x = DB^* x$ $(x \in \mathcal{H})$. また $x \in (\operatorname{ran} B^*)^\perp$ のとき，$x \in \ker B \subset (\operatorname{ran} C_1)^\perp = \ker C_1^*$ だから $C_1^* x = 0 = Dx$. ゆえに $C_1^* = D$ となり $C_1 = C$. ■

この節で述べたいくつかの有界作用素の間の関係は，次のようにまとめられる：

射影作用素				
$\Downarrow$				
正定値作用素		ユニタリー作用素	$\Longrightarrow$	等距離作用素
$\Downarrow$		$\Downarrow$		
自己共役作用素	$\Longrightarrow$	正規作用素		

最後に，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ における収束と位相に関する定義をまとめておく．

定義 2.1.24　$\{A_\alpha\}$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ のネットとし，$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする．

(1) $\{A_\alpha\}$ が A に**ノルム収束**または**一様収束**するとは，$||A_\alpha - A|| \to 0$ のときをいう．この収束による位相，つまり $||\cdot||$ から入る距離位相を**ノルム位相**または**一様位相**という．

(2) $\{A_\alpha\}$ が A に**強収束**するとは，任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して $||A_\alpha x - Ax|| \to 0$ となるときをいう．このとき，$A = \text{s-}\lim_\alpha A_\alpha$ または $A_\alpha \xrightarrow{\text{SOT}} A$ と表す．この収束による位相を**強作用素位相 (SOT)** という．

(3) $\{A_\alpha\}$ が A に**弱収束**するとは，任意の $x, y \in \mathcal{H}$ に対して $\langle A_\alpha x, y\rangle \to \langle Ax, y\rangle$, すなわち $A_\alpha x \xrightarrow{\text{w}} Ax$ $(x \in \mathcal{H})$ となるときをいう．このとき，

$A = \text{w-}\lim_\alpha A_\alpha$ または $A_\alpha \xrightarrow{\text{WOT}} A$ と表す．この収束による位相を**弱作用素位相** (**WOT**) という．

例えば，$A_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，$n \in \mathbb{N}$, $(x_i)_{i=1}^n$, $(y_i)_{i=1}^n \subset \mathcal{H}$, $\varepsilon > 0$ を任意にとり

$$\mathcal{V}(A_0; (x_i), (y_i), \varepsilon) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : |\langle (A - A_0)x_i, y_i \rangle| < \varepsilon \ (i = 1, \ldots, n)\}$$

と与えると，これらの全体は弱作用素位相に関する A_0 の基本近傍系をなす．

2.2 作用素の極分解

この節では，有界作用素の平方根，絶対値，極分解を説明する．

補題 2.2.1 複素関数 $f(\zeta) = \sqrt{1-\zeta}$ の $\zeta = 0$ でのテイラー展開

$$f(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \cdots + c_n\zeta^n + \cdots$$

は $|\zeta| \le 1$ で絶対収束する．

証明 $c_0 = f(0) = 1$ であり，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f^{(n)}(0) < 0$ だから $c_n < 0$. したがって，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| = 1 + \sum_{n=1}^{N} (-c_n) = 1 - \lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=1}^{N} c_n r^n.$$

$0 < r < 1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{N} c_n r^n \ge \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n = -1 + \sqrt{1-r} \ge -1$$

だから $\sum_{n=0}^{N} |c_n| \le 2$. よって $|\zeta| \le 1$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n\zeta^n| \le \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \le 2. \quad \blacksquare$$

定理 2.2.2 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が正定値，すなわち $A \ge 0$ ならば，$B \ge 0$ かつ $B^2 = A$ となる $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が一意的に存在する．

証明 A の正のスカラー倍を考えれば $||A|| \leq 1$ としてよい．命題 2.1.14 より

$$||I-A|| = \sup_{||x||\leq 1} |\langle (I-A)x, x\rangle| \leq 1.$$

補題 2.2.1 より

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||c_n(I-A)^n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\,||I-A||^n < +\infty$$

であるから

$$B = c_0 I + c_1(I-A) + \cdots + c_n(I-A)^n + \cdots$$

は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で絶対ノルム収束する．$1-\zeta = (\sum_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n)^2$ より

$$\sum_{m+n=k} c_m c_n = \begin{cases} 1, & k=0 \\ -1, & k=1 \\ 0, & k\geq 2 \end{cases}$$

となる．よって

$$\begin{aligned} \left\{\sum_{n=0}^{N} c_n(I-A)^n\right\}^2 &= \sum_{m,n=0}^{N} c_m c_n (I-A)^{m+n} \\ &= I-(I-A) + \sum_{m,n\leq N,\, m+n>N} c_m c_n (I-A)^{m+n}. \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} &\sum_{m,n\leq N,\, m+n>N} ||c_m c_n (I-A)^{m+n}|| \\ &\quad\leq \sum_{m,n\leq N,\, m+n>N} |c_m c_n| \to 0 \ \ (N\to\infty) \end{aligned}$$

だから，上の等式で $N\to\infty$ とすると $B^2 = I-(I-A) = A$ を得る．さらに，$||x||=1$ のとき，$c_n < 0$ $(n\in\mathbb{N})$ で

$$|\langle (I-A)^n x, x\rangle| \leq ||(I-A)^n||\,||x||^2 \leq ||I-A||^n \leq 1$$

だから

$$\langle Bx, x\rangle = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle (I-A)^n x, x\rangle \geq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 0.$$

したがって $B \geq 0$.

次に，一意性を示すために，$C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ も $C \geq 0$ かつ $C^2 = A$ とする．このとき $CA = C^3 = AC$. B は A の多項式のノルム極限だから $CB = BC$ となる．したがって

$$
\begin{aligned}
&(B-C)B(B-C) + (B-C)C(B-C) \\
&\quad = (B-C)(B+C)(B-C) \\
&\quad = (B^2 - C^2)(B-C) = (A-A)(B-C) = 0.
\end{aligned}
$$

任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$\langle (B-C)B(B-C)x, x\rangle = \langle B(B-C)x, (B-C)x\rangle \geq 0,$$

$$\langle (B-C)C(B-C)x, x\rangle = \langle C(B-C)x, (B-C)x\rangle \geq 0.$$

これらを加えると 0 に等しいから

$$\langle (B-C)B(B-C)x, x\rangle = \langle (B-C)C(B-C)x, x\rangle = 0.$$

補題 2.1.3 より

$$(B-C)B(B-C) = (B-C)C(B-C) = 0$$

となるから

$$(B-C)^3 = (B-C)B(B-C) - (B-C)C(B-C) = 0.$$

よって $(B-C)^4 = 0$ だから

$$||B-C||^4 = ||(B-C)^2||^2 = ||(B-C)^4|| = 0$$

となり $B = C$. ■

定義 2.2.3 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする．

(1) $A \geq 0$ のとき，上の定理で与えた B を A の**平方根**といい，$A^{1/2}$ または $\sqrt{A}$ で表す．

(2) $A^*A \geq 0$ (命題 2.1.12 (1)) なので，$|A| = (A^*A)^{1/2}$ と定義して A の**絶対値**という．

定義 2.2.4　$W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が**部分等距離作用素**とは

$$||Wx|| = ||x||, \qquad x \in (\ker W)^{\perp}$$

を満たすときをいう．

命題 2.2.5　$W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について次は同値：

(i) W が部分等距離作用素；

(ii) W^* が部分等距離作用素；

(iii) W^*W が射影作用素；

(iv) WW^* が射影作用素．

このとき

$$W^*W = P_{(\ker W)^{\perp}} = P_{\operatorname{ran} W^*}, \qquad WW^* = P_{\operatorname{ran} W}. \tag{2.5}$$

証明　(i) $\Longrightarrow$ (iii). $P = P_{(\ker W)^{\perp}}$ とおく．任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して，$x = y + z$ ($y \in (\ker W)^{\perp}$, $z \in \ker W$) と分解すると

$$\langle W^*Wx, x\rangle = ||Wx||^2 = ||Wy||^2 = ||y||^2 = ||Px||^2 = \langle Px, x\rangle.$$

よって $W^*W = P = P_{(\ker W)^{\perp}}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). $P = W^*W$ が射影作用素とする．$||Wx||^2 = \langle W^*Wx, x\rangle = ||Px||^2$ だから $\ker W = \ker P$. よって $(\ker W)^{\perp} = \operatorname{ran} P$ となり，任意の $x \in (\ker W)^{\perp}$ に対して $||Wx|| = ||x||$.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iv) は上で W を W^* に置き換えればよい．

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv). W^*W が射影作用素とすると，(iii) $\Longrightarrow$ (i) の証明から $W^*W = P_{(\ker W)^{\perp}}$. 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して，$x = y + z$ ($y \in (\ker W)^{\perp}$, $z \in \ker W$) と分解すると

$$WW^*Wx = WP_{(\ker W)^{\perp}}x = Wy = Wx.$$

したがって $WW^*W = W$ となり，$(WW^*)^2 = WW^*WW^* = WW^*$. また WW^* が自己共役だから，命題 2.1.20 より WW^* は射影作用素である．W と W^* を入れ替えて逆も成立．

W が部分等距離作用素のとき，W は $(\ker W)^{\perp}$ から $\operatorname{ran} W$ への等距離同型を与えるから，$\operatorname{ran} W$ は閉部分空間になる．よって $\operatorname{ran} W^*$ も閉部分

空間．このとき，命題 2.1.6 より $(\ker W)^{\perp} = \operatorname{ran} W^*$, $(\ker W^*)^{\perp} = \operatorname{ran} W$. したがって (2.5) が成立する．■

部分等距離作用素 W に対して，W^*W を W の**初期射影**，WW^* を W の**終射影**という．また，$(\ker W)^{\perp}$, $\operatorname{ran} W$ をそれぞれ W の**初期空間**，**終空間**という．

定理 2.2.6 (極分解定理)　任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$A = W|A|$$

となる部分等距離作用素 W が存在する．さらに，W は $\ker W = \ker A$ の条件で一意的であり，このとき

$$W^*W = P_{\overline{\operatorname{ran}}\,|A|} = P_{(\ker A)^{\perp}}, \qquad WW^* = P_{\overline{\operatorname{ran}}\,A},$$

$$|A| = W^*A, \qquad A^* = W^*|A^*|, \qquad |A^*| = W|A|W^*.$$

証明　任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$\|\,|A|x\|^2 = \langle |A|x, |A|x\rangle = \langle |A|^2x, x\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2$$

となるから $\|\,|A|x\| = \|Ax\|$. よって

$$W_0(|A|x) = Ax, \qquad x \in \mathcal{H}$$

と定義できて，W_0 は $\operatorname{ran}|A|$ から $\operatorname{ran} A$ の上への等距離作用素になる．W_0 は $\overline{\operatorname{ran}}\,|A|$ から $\overline{\operatorname{ran}}\,A$ の上への等距離作用素に拡張できる．さらに $(\overline{\operatorname{ran}}\,|A|)^{\perp}$ 上で 0 とおくことにより，次のような部分等距離作用素 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が定まる：

$$W|A|x = Ax, \qquad x \in \mathcal{H},$$

$$\ker W = (\overline{\operatorname{ran}}\,|A|)^{\perp}, \qquad \operatorname{ran} W = \overline{\operatorname{ran}}\,A.$$

したがって $A = W|A|$ で $\ker W = \ker|A| = \ker A$. (2.5) より

$$W^*W = P_{(\ker A)^{\perp}} = P_{\overline{\operatorname{ran}}\,|A|}, \qquad WW^* = P_{\overline{\operatorname{ran}}\,A}.$$

また $|A| = W^*W|A| = W^*A$. $W|A|W^* \geq 0$ かつ

$$(W|A|W^*)^2 = W|A|W^*W|A|W^* = W|A|^2W^* = AA^* = |A^*|^2$$

だから，定理 2.2.2 より $|A^*| = W|A|W^*$. さらに

$$A^* = |A|W^* = W^*W|A|W^* = W^*|A^*|.$$

最後に一意性を示す．V も $A = V|A|$, $\ker V = \ker A$ となる部分等距離作用素とする．$V|A| = W|A|$ より，$x \in \overline{\mathrm{ran}}\,|A| = (\ker A)^{\perp}$ に対し $Vx = Wx$. 他方，$x \in \ker A$ に対し $Vx = 0 = Wx$. よって $V = W$. ■

上で与えた分解 $A = W|A|$ を A の**極分解**という．

命題 2.2.7　$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が正規作用素または有限階 (i.e. $\mathrm{ran}\,A$ が有限次元) ならば，$A = U|A|$ となるユニタリー作用素 U が存在する．

証明　A の極分解を $A = W|A|$ とする．A が正規作用素のとき，命題 2.1.11 より $\|Ax\| = \|A^*x\|$. よって $\ker A = \ker A^* = (\overline{\mathrm{ran}}\,A)^{\perp}$. そこで $U = W + P_{\ker A}$ とすれば，U はユニタリー作用素で $A = U|A|$.

A が有限階のとき，W は $\overline{\mathrm{ran}}\,|A|$ から $\overline{\mathrm{ran}}\,A = \mathrm{ran}\,A$ への等距離同型を与えるから，$\dim \overline{\mathrm{ran}}\,|A| = \dim \overline{\mathrm{ran}}\,A < +\infty$. よって $\dim(\overline{\mathrm{ran}}\,|A|)^{\perp} = \dim(\overline{\mathrm{ran}}\,A)^{\perp}$. したがって初期空間 $(\mathrm{ran}\,|A|)^{\perp}$, 終空間 $(\overline{\mathrm{ran}}\,A)^{\perp}$ をもつ部分等距離作用素 $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在する．$U = W + V$ とすれば，U はユニタリー作用素で $A = U|A|$. ■

上の命題で A が単射でない限り，U は一意的には定まらない．特に A が行列 (つまり $\mathcal{H}$ が有限次元) のときは，$A = U|A|$ となるユニタリー行列 U が存在する．

2.3　非有界線型作用素

この節では，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界とは限らない線型作用素について基本的な事柄を説明する．非有界な線型作用素の場合，その定義域は通常 $\mathcal{H}$ 全体でなく $\mathcal{H}$ のある線型部分空間になる．

定義 2.3.1　$\mathcal{H}, \mathcal{K}$ をヒルベルト空間とする．

(1) 直和線型空間 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K} = \{(x, y) : x \in \mathcal{H},\ y \in \mathcal{K}\}$ は内積

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = \langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle$$

によりヒルベルト空間になる (定義 1.3.7 (1)). これを $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ の**直和ヒルベルト空間**という.

(2) $\mathcal{H}$ の線型部分空間 $\mathrm{dom}\,T$ を**定義域**とする線型写像 $T:\mathrm{dom}\,T\to\mathcal{K}$ を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への**線型作用素**という.

(3) 線型作用素 T の**核** $\ker T$, **値域** $\mathrm{ran}\,T$ を

$$\ker T=\{x\in\mathrm{dom}\,T:Tx=0\},$$

$$\mathrm{ran}\,T=\{Tx:x\in\mathrm{dom}\,T\}$$

と定める. さらに

$$\overline{\mathrm{dom}}\,T=\overline{\mathrm{dom}\,T}\quad (T\text{ の定義域の閉包}),$$

$$\overline{\mathrm{ran}}\,T=\overline{\mathrm{ran}\,T}\quad (T\text{ の値域の閉包})$$

と表す.

(4) T の**グラフ** $G(T)$ は

$$G(T)=\{(x,Tx):x\in\mathrm{dom}\,T\}$$

で定義される. $G(T)$ が $\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$ の閉集合であるとき, T を**閉作用素**という.

$\ker T,\mathrm{ran}\,T$ はそれぞれ $\mathcal{H},\mathcal{K}$ の線型部分空間であり, $\overline{\mathrm{dom}}\,T,\overline{\mathrm{ran}}\,T$ はそれぞれ $\mathcal{H},\mathcal{K}$ の閉部分空間である. 特に $\mathrm{dom}\,T=\mathcal{H}$ のとき, 閉グラフ定理 (定理 1.3.8) より, T が閉作用素 $\Longleftrightarrow T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ である.

命題 2.3.2 (1) T が $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素ならば, $G(T)$ は $\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$ の線型部分空間である.

(2) G が $\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$ の線型部分空間で, $(0,y)\in G\Longrightarrow y=0$ のとき, $G=G(T)$ となる $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素 T が一意的に存在する.

(3) $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素 T について次は同値：

(i) T が閉作用素；

(ii) $G(T)$ が $\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$ の閉部分空間；

(iii) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathrm{dom}\,T$ で $x_n\to x\in\mathcal{H}$, $Tx_n\to y\in\mathcal{K}$ (ともにノルム収束) ならば $x\in\mathrm{dom}\,T$ かつ $Tx=y$.

証明　(1) は容易．

(2) $(x,y),(x,y') \in G$ とすると，$(0,y-y') = (x,y)-(x,y') \in G$ だから $y=y'$. したがって

$$\mathrm{dom}\, T = \{x \in \mathcal{H} : (x,y) \in G \text{ となる } y \in \mathcal{K} \text{ が存在 }\}$$

とすると，任意の $x \in \mathrm{dom}\, T$ に対して $Tx \in \mathcal{K}$ が一意的に存在して $(x,Tx) \in G$. このとき T が線型作用素で $G = G(T)$.

(3) (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) は定義と (1) より明らか．(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) も明らか．■

定義 2.3.3　(1) T, S を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素とする．$\mathrm{dom}\, T \subset \mathrm{dom}\, S$ かつ $Tx = Sx$ $(x \in \mathrm{dom}\, T)$ のとき，S は T の**拡大**または T は S の**縮小**といい，$T \subset S$ と表す．

(2) $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素 T について，$T \subset S$ となる閉作用素 S が存在するとき，T は**閉化可能**または**可閉**という．

命題 2.3.4　T, S を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素とする．

(1) $T \subset S \Longleftrightarrow G(T) \subset G(S)$.

(2) 次は同値：

(i) T が可閉；

(ii) $\{x_n\} \subset \mathrm{dom}\, T$, $x_n \to 0$, $Tx_n \to y$ ならば $y = 0$.

(3) T が可閉のとき，$G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$ となる閉作用素 $\overline{T}$ が存在する．この $\overline{T}$ は $T \subset S$ となる閉作用素 S で最小のものである．

証明　(1) は定義より明らか．

(2) 閉作用素 S が存在して $T \subset S$ とする．$\{x_n\} \subset \mathrm{dom}\, T$, $x_n \to 0$, $Tx_n \to y$ のとき，$\{x_n\} \subset \mathrm{dom}\, S$, $Tx_n = Sx_n$ だから，命題 2.3.2 (3) より $y = S0 = 0$. よって (i) $\Longrightarrow$ (ii). 逆に (ii) が成立したとする．これは $(0,y) \in \overline{G(T)} \Longrightarrow y = 0$ を意味するので，命題 2.3.2 (2) より線型作用素 $\overline{T}$ が存在して $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$. よって $\overline{T}$ は閉作用素で $T \subset \overline{T}$.

(3) $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$ となる閉作用素 $\overline{T}$ の存在は (2) の証明で既に示した．また，S が閉作用素で $T \subset S$ とすると，$G(T) \subset G(S)$ で $G(S)$ が閉だから，$G(\overline{T}) = \overline{G(T)} \subset G(S)$. よって $\overline{T} \subset S$.　■

可閉作用素 T に対して，命題 2.3.4 (3) で与えた閉作用素 $\overline{T}$ を T の**閉包**という．

以下，$\mathcal{H}$ からそれ自身への線型作用素 T で $\overline{\operatorname{dom}} T = \mathcal{H}$ であるものを考える．このような T を稠密な定義域をもつ $\mathcal{H}$ 上の線型作用素と呼ぶ．

補題 2.3.5 T を稠密な定義域をもつ $\mathcal{H}$ 上の線型作用素とする．次の条件を満たす $y \in \mathcal{H}$ の全体を $\operatorname{dom} T^*$ とおく：$z \in \mathcal{H}$ が存在して

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, z \rangle, \qquad x \in \operatorname{dom} T. \tag{2.6}$$

このとき $T^* y = z$ と定めると，$T^* : \operatorname{dom} T^* \to \mathcal{H}$ は $\mathcal{H}$ 上の線型作用素になる．

証明 $\overline{\operatorname{dom}} T = \mathcal{H}$ より，各 $y \in \operatorname{dom} T^*$ に対して (2.6) を満たす $z \in \mathcal{H}$ は一意的に存在する．よって $T^* y = z$ として写像 $T^* : \operatorname{dom} T^* \to \mathcal{H}$ が定まる．$y_1, y_2 \in \operatorname{dom} T^*$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ のとき，任意の $x \in \operatorname{dom} T$ に対して

$$\begin{aligned}\langle Tx, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle &= \overline{\alpha}_1 \langle Tx, y_1 \rangle + \overline{\alpha}_2 \langle Tx, y_2 \rangle \\ &= \overline{\alpha}_1 \langle x, T^* y_1 \rangle + \overline{\alpha}_2 \langle x, T^* y_2 \rangle \\ &= \langle x, \alpha_1 T^* y_1 + \alpha_2 T^* y_2 \rangle.\end{aligned}$$

よって $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \operatorname{dom} T^*$ かつ $T^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 T^* y_1 + \alpha_2 T^* y_2$. したがって $\operatorname{dom} T^*$ が $\mathcal{H}$ の線型部分空間であり，T^* は $\mathcal{H}$ 上の線型作用素である． ■

定義 2.3.6 稠密な定義域をもつ $\mathcal{H}$ 上の線型作用素 T に対して，上の補題で示した線型作用素 T^* を T の**共役作用素**という．

(1) $T \subset T^*$, すなわち

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \qquad x, y \in \operatorname{dom} T$$

のとき，T は**対称**という．

(2) 特に $T = T^*$, すなわち T が対称かつ $\operatorname{dom} T = \operatorname{dom} T^*$ のとき，T は**自己共役**という．

(3) 自己共役作用素 T が

$$\langle Tx, x \rangle \geq 0, \qquad x \in \operatorname{dom} T$$

となるとき，T は**正定値**または単に**正**といい，$T \geq 0$ と表す．

非有界作用素の和と積は次のように定義される．T, S を $\mathcal{H}$ 上の線型作用素とする．$\operatorname{dom}(T+S) = \operatorname{dom} T \cap \operatorname{dom} S$ として

$$(T+S)x = Tx + Sx, \qquad x \in \operatorname{dom}(T+S).$$

また，$\operatorname{dom}(TS) = \{x \in \operatorname{dom} S : Sx \in \operatorname{dom} T\}$ として

$$(TS)x = T(Sx), \qquad x \in \operatorname{dom}(TS).$$

ここで，T, S が稠密な定義域をもつとしても，$\operatorname{dom}(T+S) = \{0\}$ あるいは $\operatorname{dom}(TS) = \{0\}$ も起こることに注意する．

命題 2.3.7　T, S を稠密な定義域をもつ $\mathcal{H}$ 上の線型作用素とする．

(1) $T \subset S \Longrightarrow S^* \subset T^*$.

(2) $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ に対して $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.

(3) $\overline{\operatorname{dom}}(T+S) = \mathcal{H}$ のとき $T^* + S^* \subset (T+S)^*$.

(4) $\overline{\operatorname{dom}}(TS) = \mathcal{H}$ のとき $S^*T^* \subset (TS)^*$.

証明　(1) $T \subset S$, $y \in \operatorname{dom} S^*$ とすると，任意の $x \in \operatorname{dom} T$ に対して

$$\langle Tx, y\rangle = \langle Sx, y\rangle = \langle x, S^*y\rangle.$$

よって $y \in \operatorname{dom} T^*$, $S^*y = T^*y$. したがって $S^* \subset T^*$.

(2) $\alpha\,(\neq 0) \in \mathbb{C}$, $y \in \operatorname{dom} T^*$ とすると，任意の $x \in \operatorname{dom}(\alpha T) = \operatorname{dom} T$ に対して

$$\langle(\alpha T)x, y\rangle = \alpha\langle Tx, y\rangle = \langle x, \overline{\alpha} T^* y\rangle.$$

よって $y \in \operatorname{dom}(\alpha T)^*$, $\overline{\alpha}T^*y = (\alpha T)^*y$. これより $\overline{\alpha}T^* \subset (\alpha T)^*$. α を α^{-1} に置き換えて $\overline{\alpha}^{-1}(\alpha T)^* \subset (\alpha^{-1}\alpha T)^* = T^*$. よって $(\alpha T)^* \subset \overline{\alpha}T^*$ も成立するから $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*$.

(3) $\overline{\operatorname{dom}}(T+S) = \mathcal{H}$, $y \in \operatorname{dom}(T^* + S^*) = \operatorname{dom} T^* \cap \operatorname{dom} S^*$ とする．$x \in \operatorname{dom}(T+S)$ ならば

$$\begin{aligned}\langle (T+S)x, y\rangle &= \langle Tx, y\rangle + \langle Sx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle + \langle x, S^*y\rangle \\ &= \langle x, (T^* + S^*)y\rangle.\end{aligned}$$

よって $y \in \operatorname{dom}(T+S)^*$, $(T^*+S^*)y = (T+S)^*y$. ゆえに $T^*+S^* \subset (T+S)^*$.

(4) $\overline{\mathrm{dom}}(TS) = \mathcal{H}$, $y \in \mathrm{dom}(S^*T^*)$ とする．このとき $y \in \mathrm{dom}\, T^*$, $T^*y \in \mathrm{dom}\, S^*$ だから，$x \in \mathrm{dom}(TS)$ ならば

$$\langle TSx, y\rangle = \langle Sx, T^*y\rangle = \langle x, S^*T^*y\rangle.$$

よって $y \in \mathrm{dom}(TS)^*$, $S^*T^*y = (TS)^*y$. ゆえに $S^*T^* \subset (TS)^*$. ■

命題 2.3.8 T を稠密な定義域をもつ $\mathcal{H}$ 上の線型作用素とする．

(1) T^* は閉作用素．

(2) T が閉作用素ならば，$\overline{\mathrm{dom}}\, T^* = \mathcal{H}$ で $T = T^{**}$ $(= (T^*)^*)$.

(3) T が可閉 $\Longrightarrow$ $(\overline{T})^* = T^*$.

(4) T が可閉 $\Longleftrightarrow$ $\overline{\mathrm{dom}}\, T^* = \mathcal{H}$. このとき $\overline{T} = T^{**}$.

証明 $\mathbf{U} : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ を $\mathbf{U}(x, y) = (y, -x)$ と定めると，$\mathbf{U}$ は明らかに有界線型作用素である．

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{U}(x, y), (x', y')\rangle &= \langle (y, -x), (x', y')\rangle = \langle y, x'\rangle - \langle x, y'\rangle \\ &= \langle (x, y), (-y', x')\rangle = \langle (x, y), -\mathbf{U}(x', y')\rangle\end{aligned}$$

となるから $\mathbf{U}^* = -\mathbf{U}$. また

$$\mathbf{U}^2(x, y) = \mathbf{U}(y, -x) = (-x, -y) = -(x, y)$$

だから $\mathbf{U}^2 = -I$. したがって $\mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^*\mathbf{U} = I$, すなわち $\mathbf{U}$ はユニタリー作用素である．さらに

$$\begin{aligned}(y, z) \in G(T^*) &\Longleftrightarrow \langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle \ \ (x \in \mathrm{dom}\, T) \\ &\Longleftrightarrow \langle (x, Tx), (-z, y)\rangle = 0 \ \ (x \in \mathrm{dom}\, T) \\ &\Longleftrightarrow (-z, y) \in G(T)^\perp \\ &\Longleftrightarrow (y, z) \in \mathbf{U}(G(T)^\perp).\end{aligned}$$

ゆえに

$$G(T^*) = \mathbf{U}(G(T)^\perp). \tag{2.7}$$

これより

$$\mathbf{U}(G(T^*)^\perp) = (\mathbf{U}G(T^*))^\perp = (\mathbf{U}^2(G(T)^\perp))^\perp = G(T)^{\perp\perp} = \overline{G(T)}. \tag{2.8}$$

(1) $G(T)^{\perp}$ が $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ の閉部分空間だから，(2.7) より $G(T^*)$ も閉部分空間である．よって T^* は閉作用素．

(2) T が閉作用素とする．$v \in (\operatorname{dom} T^*)^{\perp}$ のとき，任意の $y \in \operatorname{dom} T^*$ に対して

$$\langle (0,v), \mathbf{U}(y, T^*y)\rangle = \langle (0,v), (T^*y, -y)\rangle = -\langle v, y\rangle = 0.$$

よって (2.8) より

$$(0,v) \in (\mathbf{U}G(T^*))^{\perp} = \overline{G(T)} = G(T)$$

であるから $v = T0 = 0$. したがって $(\operatorname{dom} T^*)^{\perp} = \{0\}$ となり，$\overline{\operatorname{dom}}\, T^* = \mathcal{H}$. また，$T^*$ に (2.7) を適用して

$$G(T^{**}) = \mathbf{U}(G(T^*)^{\perp}) = \overline{G(T)} = G(T).$$

したがって，グラフが一致するから $T^{**} = T$ となる．

(3) $T \subset \overline{T}$ で $\overline{G(T)} = G(\overline{T})$ だから，(2.7) を $\overline{T}$ にも適用して

$$G(T^*) = \mathbf{U}(G(T)^{\perp}) = \mathbf{U}(G(\overline{T})^{\perp}) = G((\overline{T})^*).$$

よって $(\overline{T})^* = T^*$.

(4) $T \subset S$ となる閉作用素 S が存在すると，$S^* \subset T^*$ で，(2) より $\overline{\operatorname{dom}}\, S^* = \mathcal{H}$. よって $\overline{\operatorname{dom}}\, T^* = \mathcal{H}$. 逆に $\overline{\operatorname{dom}}\, T^* = \mathcal{H}$ とすると，T^* に (2.7) を適用して (2.8) を用いると

$$G(T^{**}) = \overline{G(T)} \supset G(T).$$

したがって $T \subset T^{**}$ で T^{**} が閉作用素だから，T は可閉である．このとき $G(T^{**}) = \overline{G(T)} = G(\overline{T})$ だから $\overline{T} = T^{**}$. ■

命題 2.3.9　T が稠密な定義域をもつ $\mathcal{H}$ 上の線型作用素とする．

(1) T が対称 $\Longleftrightarrow \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ $(x \in \operatorname{dom} T)$.

(2) T が対称ならば T は可閉.

(3) T が自己共役ならば T は対称かつ閉作用素.

証明　(1) $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle \Longleftrightarrow \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ より明らか．

(2) $T \subset T^*$ で T^* が閉作用素だから，T は可閉である．

(3) $T = T^*$ より明らか． ■

稠密な定義域をもつ $\mathcal{H}$ 上の線型作用素 T について，命題 2.3.7 (1), 2.3.8, 2.3.9 を合わせると次がわかる．

1° T が対称のとき $T \subset \overline{T} = T^{**} \subset T^*$.

2° T が対称かつ閉作用素のとき $T = T^{**} \subset T^*$.

3° T が自己共役のとき $T = T^{**} = T^*$.

次の補題は $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の場合と同様に証明できる (命題 2.1.5, 2.1.6 参照).

補題 2.3.10 $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ をヒルベルト空間とする．任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ に対して，A の共役作用素 $A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ が

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle, \qquad x \in \mathcal{K},\ y \in \mathcal{H}$$

により一意的に定まる．このとき，$\|A^*\| = \|A\|$, $\overline{\operatorname{ran}} A^* = (\ker A)^\perp$.

定理 2.3.11 T を稠密な定義域をもつ $\mathcal{H}$ 上の閉作用素とする．

(1) $I + T^*T$ は $\operatorname{dom}(I+T^*T) = \operatorname{dom}(T^*T)$ 上で単射かつ $\operatorname{ran}(I+T^*T) = \mathcal{H}$.

(2) $\|(I + T^*T)^{-1}\| \leq 1$ かつ $(I + T^*T)^{-1} \geq 0$.

(3) $\overline{\operatorname{dom}}(T^*T) = \mathcal{H}$ で T^*T は正定値の自己共役作用素である．

証明 (1) $G(T)$ は $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ の閉部分空間としてヒルベルト空間になる．$P : G(T) \to \mathcal{H}$ を $P(x, Tx) = x$ と定めると，定理 1.3.8 の証明と同じく，$P \in \mathcal{B}(G(T), \mathcal{H})$ で P は単射である．前補題より $P^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, G(T))$ が定まり $\overline{\operatorname{ran}} P^* = G(T)$. 任意の $y \in \mathcal{H}$ に対して，$x \in \operatorname{dom} T$ がとれて $P^* y = (x, Tx)$. $u \in \operatorname{dom} T$ ならば

$$\langle u, y \rangle = \langle P(u, Tu), y \rangle = \langle (u, Tu), P^* y \rangle = \langle u, x \rangle + \langle Tu, Tx \rangle$$

となるから $\langle Tu, Tx \rangle = \langle u, y - x \rangle$. よって $Tx \in \operatorname{dom} T^*$ で $T^*Tx = y - x$. ゆえに $(I + T^*T)x = y$. これより $\operatorname{ran}(I + T^*T) = \mathcal{H}$. また，$x \in \operatorname{dom}(I + T^*T)$ のとき

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &\leq \langle x, x \rangle + \langle Tx, Tx \rangle = \langle (I + T^*T)x, x \rangle \\ &\leq \|(I + T^*T)x\| \, \|x\|. \end{aligned} \tag{2.9}$$

したがって $\ker(I+T^*T)=\{0\}$, すなわち $I+T^*T$ は単射.

(2) 任意の $y\in\mathcal{H}$ に対して，(2.9) で $x=(I+T^*T)^{-1}y$ とおくと $\|(I+T^*R)^{-1}y\|\le\|y\|$. よって $\|(I+T^*T)^{-1}\|\le 1$. 同じく (2.9) より $\langle y,(I+T^*T)^{-1}y\rangle\ge\|x\|^2\ge 0$. したがって $(I+T^*T)^{-1}\ge 0$.

(3) $\mathcal{D}=\mathrm{dom}\,T^*T$ とおく. $\overline{\mathcal{D}}=\mathcal{H}$ を示すには，$\overline{T|\mathcal{D}}=T$ をいえば十分である. ($\overline{T|\mathcal{D}}=T$ となるような $\mathcal{H}$ の線型部分空間 $\mathcal{D}$ は T の**コア**と呼ばれる.) P を (1) の証明で定義したものとする. $\overline{\mathrm{ran}}\,P^*=G(T)$ だから，任意の $x\in\mathrm{dom}\,T$ に対して $\{y_n\}\subset\mathcal{H}$ が存在して $P^*y_n\to(x,Tx)$. $P^*y_n=(x_n,Tx_n)$ と書くと，$x_n\to x$ かつ $Tx_n\to Tx$. (1) の証明より $Tx_n\in\mathrm{dom}\,T^*$. つまり $\{x_n\}\subset\mathcal{D}$. したがって $\overline{T|\mathcal{D}}=T$ が示せた.

次に，$x\in\mathcal{D}$ のとき

$$\langle(I+T^*T)x,y\rangle=\langle x,y\rangle+\langle T^*Tx,y\rangle$$

だから，$\mathrm{dom}(T^*T)^*=\mathrm{dom}(I+T^*T)^*$ で $I+(T^*T)^*=(I+T^*T)^*$. 任意の $x,y\in\mathcal{D}$ に対して

$$\langle T^*Tx,y\rangle=\langle Tx,Ty\rangle=\langle x,T^*Ty\rangle.$$

よって $T^*T\subset(T^*T)^*$ となり

$$I+T^*T\subset(I+T^*T)^*. \tag{2.10}$$

ところで，$y\in\mathrm{dom}(I+T^*T)^*$, $(I+T^*T)^*y=0$ とすると，$\langle(I+T^*T)x,y\rangle=\langle x,(I+T^*T)^*y\rangle=0$ $(x\in\mathcal{D})$. $\mathrm{ran}(I+T^*T)=\mathcal{H}$ より $y=0$ となり，$(I+T^*T)^*$ は単射. 任意の $x\in\mathrm{dom}(I+T^*T)^*$ に対して，$x_1\in\mathcal{D}$ がとれて $(I+T^*T)^*x=(I+T^*T)x_1$. (2.10) より $(I+T^*T)^*x=(I+T^*T)^*x_1$ となるが，$(I+T^*T)^*$ が単射だから $x=x_1\in\mathcal{D}$. よって $\mathrm{dom}(I+T^*T)^*\subset\mathcal{D}$. (2.10) と合わせて $I+T^*T=(I+T^*T)^*=I+(T^*T)^*$. ゆえに $T^*T=(T^*T)^*$. $T^*T\ge 0$ は明らか. ■

次の定理は対称作用素について自己共役性の特徴づけを与える.

定理 2.3.12　稠密な定義域をもつ $\mathcal{H}$ 上の対称作用素について次は同値：

(i) T が自己共役；

(ii) T が閉作用素で $\ker(T^*\pm iI)=\{0\}$;

(iii) $\mathrm{ran}(T\pm iI)=\mathcal{H}$;

(iv) T が閉作用素で $\overline{\mathrm{ran}}(T\pm iI)=\mathcal{H}$.

証明　(i) $\Longrightarrow$ (ii). $T=T^*$ とすると $\operatorname{dom}(T^*\pm iI)=\operatorname{dom}T^*=\operatorname{dom}T$. $x\in\ker(T^*+iI)$ ならば，$(T-iI)^*=T^*+iI$ だから

$$\langle Tx,x\rangle - i||x||^2 = \langle (T-iI)x,x\rangle = \langle x,(T^*+iI)x\rangle = 0.$$

$\langle Tx,x\rangle\in\mathbb{R}$ より $x=0$. よって $\ker(T^*+iI)=\{0\}$. $\ker(T^*-iI)=\{0\}$ も同様.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iv). $(T\pm iI)^*=T^*\mp iI$ だから，S が稠密な定義域をもつ可閉作用素のとき $(\operatorname{ran}S)^\perp=\ker S^*$ を示せば十分．これは

$$\begin{aligned} y\in(\operatorname{ran}S)^\perp &\iff \langle Sx,y\rangle=0\ \ (x\in\operatorname{dom}S)\\ &\iff y\in\operatorname{dom}S^*,\ S^*y=0 \end{aligned}$$

より従う．

(iv) $\Longrightarrow$ (iii). T が閉作用素のとき，$\operatorname{ran}(T\pm iI)$ が閉であることを示せばよい．$\{x_n\}\subset\operatorname{dom}T$, $(T+iI)x_n\to y$ とする．$\langle T(x_m-x_n),x_m-x_n\rangle\in\mathbb{R}$ だから

$$\begin{aligned} ||x_m-x_n||^2 &\le |\langle (T+iI)(x_m-x_n),x_m-x_n\rangle|\\ &\le ||(T+iI)(x_m-x_n)||\,||x_m-x_n||. \end{aligned}$$

ゆえに $||x_m-x_n||\le||(T+iI)(x_m-x_n)||\to 0$ $(m,n\to\infty)$ となるから，$x\in\mathcal{H}$ が存在して $x_n\to x$. よって $Tx_n=(T+iI)x_n-ix_n\to y-ix$. T が閉作用素だから，$x\in\operatorname{dom}T$ で $Tx=y-ix$, i.e. $(T+iI)x=y$. したがって $\operatorname{ran}(T+iI)$ は閉集合．$T-iI$ についても同様．

(iii) $\Longrightarrow$ (i). $T\subset T^*$ だから，$\operatorname{dom}T=\operatorname{dom}T^*$ を示せばよい．$y\in\operatorname{dom}T^*$ とすると，$\operatorname{ran}(T-iI)=\mathcal{H}$ より $x\in\operatorname{dom}T$ がとれて $(T-iI)x=(T^*-iI)y$. $T\subset T^*$ より $(T^*-iI)(y-x)=0$. ところで $\operatorname{ran}(T+iI)=\mathcal{H}$ だから，上の (ii) $\Longleftrightarrow$ (iv) の証明より，$\ker(T^*-iI)=(\operatorname{ran}(T+iI))^\perp=\{0\}$. よって $y=x\in\operatorname{dom}T$ となり，それゆえ $\operatorname{dom}T=\operatorname{dom}T^*$.　■

対称作用素 T が**本質的自己共役**とは，その閉包 $\overline{T}$ が自己共役であるときをいう．

系 2.3.13　稠密な定義域をもつ $\mathcal{H}$ 上の対称作用素について次は同値：

(i) T が本質的自己共役；

(ii) $\ker(T^* \pm iI) = \{0\}$;
(iii) $\overline{\mathrm{ran}}(T \pm iI) = \mathcal{H}$.

証明 $\overline{T}^* = T^*$, $\overline{\mathrm{ran}}(\overline{T} \pm iI) = \overline{\mathrm{ran}}(T \pm iI)$ であるから，前定理を $\overline{T}$ に適用すればよい． ■

最後に，典型的な非有界作用素として微分作用素をいくつか例示しておこう．

例 2.3.14 ルベーグ測度によるヒルベルト空間 $\mathcal{H} = L^2([0,1])$ で考える．連続微分可能な $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ の全体を $C^1([0,1])$ で表す (ただし $f'(0), f'(1)$ は右，左微分をとる)．また，$f : [0,1] \to \mathbb{C}$ が絶対連続とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して

$$0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n \le 1,\ \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) < \delta$$
$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| < \varepsilon$$

のときをいう．この絶対連続な関数全体を $AC([0,1])$ で表す．よく知られた事実として，$f \in AC([0,1])$ のための必要十分条件は $g \in L^1([0,1])$ (i.e. g が可測で $\int_0^1 |g(t)|dt < +\infty$) が存在して $f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)ds$ $(0 \le s \le 1)$, i.e. $f'(t) = g(t)$ a.e. 線型作用素 D_0, D を

$$\mathrm{dom}\, D_0 = \{f \in C^1([0,1]) : f(0) = f(1) = 0\}, \quad D_0 f = if',$$

$$\mathrm{dom}\, D = \{f \in C^1([0,1]) : f(0) = f(1)\}, \quad Df = if'$$

と定めると，$D_0 \subset D \subset D^* \subset D_0^*$ で $\overline{D_0} \subset \overline{D}$. このとき，$\overline{D}$ は自己共役であるが，$\overline{D_0}$ はそうでない．

証明 $\{f \in C([0,1]) : f(0) = f(1) = 0\}$ は $L^2([0,1])$ で稠密である．$f \in C([0,1])$ が $f(0) = f(1) = 0$ のとき，ワイエルシュトラスの近似定理 (付録の系 A.4.6 (1)) より，f は多項式で一様近似できるが，さらに 1 次関数で調節すると，f は $p(0) = p(1) = 0$ である多項式 p で一様近似できる．以上より，$\mathrm{dom}\, D_0$ は $L^2([0,1])$ で稠密であることがわかる．部分積分の計算より $\langle Df, g\rangle = \langle f, Dg\rangle$ $(f, g \in \mathrm{dom}\, D)$ だから，$D_0 \subset D \subset D^* \subset D_0^*$ となり，

D_0, D は $\mathcal{H}$ 上の対称作用素．そこで D_0^*, D^* を決定しよう．$g \in \operatorname{dom} D^*$, $h = D^* g$ とすると，任意の $f \in \operatorname{dom} D$ に対して $\langle Df, g\rangle = \langle f, h\rangle$, i.e.

$$\begin{aligned} i\int_0^1 f'(t)\overline{g(t)}dt &= \int_0^1 f(t)\overline{h(t)}dt \\ &= f(1)\overline{H(1)} - \int_0^1 f'(t)\overline{H(t)}dt. \end{aligned}$$

上で $H(t) = \int_0^t h(s)ds$ とおいた．$f(1)$ が任意だから $H(1) = 0$ であり，さらに $H(t) = ig(t) - ig(0)$ $(0 \le t \le 1)$. これを整理すると $g \in AC([0,1])$, $h = ig', g(0) = g(1)$ となるから

$$\operatorname{dom} D^* = \{g \in AC([0,1]) : g' \in L^2([0,1]),\ g(0) = g(1)\}, \quad D^* g = ig'.$$

同様にして

$$\operatorname{dom} D_0^* = \{g \in AC([0,1]) : g' \in L^2([0,1])\}, \quad D_0^* g = ig'.$$

ところで，$(e^t)' = e^t$ より $e^t \in \ker(D_0^* - iI)$ だから，系 2.3.13 より $\overline{D_0}$ は自己共役でない．他方，$g \in \ker(D^* \pm iI)$ とすると，$g(0) = g(1)$ かつ $g' = \mp g$ となり $g = 0$. ゆえに $\overline{D}$ は自己共役． ■

例 2.3.15 直線 $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度によるヒルベルト空間 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ で考える．無限回微分可能な急減少関数の全体 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $L^2(\mathbb{R})$ の稠密な線型部分空間である．$P_0, Q_0 : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を

$$(P_0 f)(t) = if'(t), \quad (Q_0 f)(t) = tf(t)$$

と定める．P_0, Q_0 が $\mathcal{H}$ 上の対称作用素であることは簡単にわかる (P_0 については部分積分による)．このとき，$P = \overline{P_0}$, $Q = \overline{Q_0}$ は自己共役である．

証明 任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して，$g = (t \pm i)^{-1} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ で $(Q_0 \pm iI)g = f$. よって $\overline{\operatorname{ran}}(Q_0 \pm iI) = \mathcal{H}$. 系 2.3.13 より Q は自己共役．次に，$h \in \ker(P_0^* + iI)$ とする．任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して，$f_s = f(\cdot + s)$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\langle f_s, h\rangle &= \lim_{\delta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t+s+\delta) - f(t+s)}{\delta}\overline{h(t)}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t+s)\overline{h(t)}dt = -i\langle P_0 f_s, h\rangle \\ &= -i\langle f_s, P_0^* h\rangle = -i\langle f_s, -ih\rangle = \langle f_s, h\rangle. \end{aligned}$$

上の 2 番目の等号はルベーグの収束定理による．この微分方程式を解いて $\langle f_s, h\rangle = \langle f, h\rangle e^s$ $(s \in \mathbb{R})$．しかし，$\lim_{|s|\to\infty}\langle f_s, h\rangle = 0$ (証明せよ) だから $\langle f, h\rangle = 0$. よって $h = 0$ となり $\ker(P_0^* + iI) = \{0\}$. 同様に $\ker(P_0^* - iI) = \{0\}$. ゆえに系 2.3.13 より P は自己共役．■

上で与えた自己共役作用素の組 P, Q は，量子力学で重要な役割をもっており，**正準交換関係**と呼ばれる次の関係式を満たす：

$$PQ - QP = iI. \tag{2.11}$$

正確には，上の左辺は $PQ - QP$ の閉包を意味する．実際，任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して

$$PQf = i(tf(t))' = if(t) + itf'(t) = if + QPf$$

だから $(PQ - QP)f = if$. したがって (2.11) が成立する．ついでに，P, Q ともに有界な自己共役作用素のときは，関係式 (2.11) は不可能であることを示しておく．有界な P, Q が (2.11) を満たすとすると，帰納法により $PQ^n - Q^nP = inQ^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ が成立し

$$n||Q||^{n-1} = ||inQ^{n-1}|| \le 2||P||\,||Q||^n.$$

これより $n \le 2||P||\,||Q||$ となり矛盾．(有限次元のときは (2.11) の両辺のトレースをとるだけでよい.)

演習問題 2

1. 等式 (2.1) を示せ．

2. 命題 2.1.5 の (1)–(4) を証明せよ．

3. $A, B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とし，A, B は自己共役とする．次を示せ．

(1) $-||A||I \le A \le ||A||I$.

(2) $A \ge B \ge 0 \Longrightarrow ||A|| \ge ||B||$.

(3) $A \ge B \Longrightarrow C^*AC \ge C^*BC$.

(4) $A \ge 0$ で A が可逆ならば，$A \ge ||A^{-1}||^{-1}I$, $A^{-1} \ge ||A||^{-1}I$.

(5) $A \ge B \ge 0$ で B が可逆ならば，A も可逆で $B^{-1} \ge A^{-1}$.

4. 数域半径 $w(A) = \sup_{||x||=1} |\langle Ax, x\rangle|$ が $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ のノルムになることを示せ．また $\frac{1}{2}||A|| \leq w(A) \leq ||A||$ を証明せよ．

5. 射影作用素 P, Q について，PQ が射影作用素 $\Longleftrightarrow PQ = QP$ を示せ．このとき $\operatorname{ran} PQ = \operatorname{ran} P \cap \operatorname{ran} Q$ も示せ．

6. P, Q を射影作用素とし，$\operatorname{ran} P \cap \operatorname{ran} Q$ 上への射影作用素を $P \wedge Q$ で表す．このとき $(PQ)^n \xrightarrow{\text{SOT}} P \wedge Q$ を証明せよ．

7. ネット $\{A_\alpha\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ と $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について，$||A_\alpha - A|| \to 0 \Longrightarrow A_\alpha \xrightarrow{\text{SOT}} A \Longrightarrow A_\alpha \xrightarrow{\text{WOT}} A$ を示せ．

8. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に強作用素位相を入れたとき，和：$(A, B) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mapsto A + B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とスカラー倍：$(\alpha, A) \in \mathbb{C} \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mapsto \alpha A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が連続写像になることを示せ．また，弱作用素位相についても同様のことを示せ．

9. $\mathcal{H}$ は可分とし，$\{x \in \mathcal{H} : ||x|| \leq 1\}$ で稠密な $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ をとる．$A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$
\begin{aligned}
d_s(A, B) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} ||(A - B)x_n||, \\
d_w(A, B) &= \sum_{m,n=1}^\infty \frac{1}{2^{m+n}} |\langle (A - B)x_m, x_n\rangle|
\end{aligned}
$$

と定める．このとき次を示せ．

(1) d_s, d_w は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の距離である．

(2) $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の有界な部分集合上で，d_s の位相は強作用素位相と一致し，d_w の位相は弱作用素位相と一致する．

10. $\{A_\alpha\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ はネットとし，$A_\alpha = A_\alpha^*$ とする．$\{A_\alpha\}$ が単調増大 (i.e. $\alpha \leq \beta \Longrightarrow A_\alpha \leq A_\beta$) であり，すべての α に対して $A_\alpha \leq B$ となる $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B = B^*$ が存在するならば，$\{A_\alpha\}$ はある $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A = A^*$ に強収束することを証明せよ．

11. 作用素の絶対値については，次のような主張はすべて一般には不成立．

(1) $|A + B| \leq |A| + |B|$.

(2) $A = A^*$, $B \geq 0$ かつ $-B \leq A \leq B$ ならば $|A| \leq B$.
(3) $|\mathrm{Re}\, A| \leq |A|$, $|\mathrm{Im}\, A| \leq |A|$. ($\mathrm{Re}\, A$, $\mathrm{Im}\, A$ は A の実部，虚部)
(4) $\| \, |A| - |B| \, \| \leq \|A - B\|$.
これらの反例を 2×2 行列で与えよ．

12. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の極分解を $A = W|A|$ とする．A が正規作用素 $\Longrightarrow W|A| = |A|W$ を示せ．これの逆は成立するか．

13. T を稠密な定義域をもつ $\mathcal{H}$ 上の線型作用素とし，$\mathrm{dom}\, T$ に内積

$$\langle x, y \rangle_T = \langle x, y \rangle + \langle Tx, Ty \rangle, \qquad x, y \in \mathrm{dom}\, T$$

を定める．このとき，T が閉作用素である必要十分条件は，$\mathrm{dom}\, T$ が $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ によりヒルベルト空間になることを証明せよ．

14. $\mathcal{H} = L^2([0,1])$ において，各 $\theta \in \mathbb{C}$, $|\theta| = 1$ に対して，線型作用素 D_θ を

$$\mathrm{dom}\, D_\theta = \{f \in AC([0,1]) : f' \in L^2([0,1]),\ f(1) = \theta f(0)\}$$

で $D_\theta f = if'$ と定める．また $(Mf)(t) = tf(t)$ $(f \in \mathcal{H})$ と定める．このとき次を示せ．
(1) 各 D_θ は自己共役．(ゆえに例 2.3.14 の D_0 は無限個の自己共役拡張をもつ.)
(2) $M \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ で M は自己共役．
(3) $\overline{D_\theta M - M D_\theta} = iI$. (ゆえに (2.11) の関係式は片方が有界作用素でも可能.)

15. 例 2.3.15 の P_0 ($\mathrm{dom}\, P_0 = \mathcal{S}(\mathbb{R})$) が本質的自己共役であることを $L^2(\mathbb{R})$ のフーリエ変換を使って示せ．(ヒント：$L^2(\mathbb{R})$ のフーリエ変換を $\mathcal{F} f = \hat{f}$ とすると，$\mathcal{F}$ はユニタリー作用素で $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を満たす．$\mathcal{F} P_0 \mathcal{F} = -Q_0$ を示せ.)

16. $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が正規作用素のとき，$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して $SA = AT \Longrightarrow S^* A = AT^*$ (**フグレ－パットナムの定理**)．これを次の順序で証明せよ．

(1) 任意の $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$e^S = I + S + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \cdots$$

は絶対ノルム収束する.

(2) $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $ST = TS$ ならば $e^{S+T} = e^S e^T$.

(3) $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $S^* = -S$ ならば e^S はユニタリー.

(4) 以下，S, T は正規で $SA = AT$ とし，$\zeta \in \mathbb{C}$ は任意とすると，$e^{\bar{\zeta}S}A = Ae^{\bar{\zeta}T}$.

(5) $e^{\zeta S^*}Ae^{-\zeta T^*} = e^{\zeta S^* - \bar{\zeta}S}Ae^{\bar{\zeta}T - \zeta T^*}$.

(6) $||e^{\zeta S^*}Ae^{-\zeta T^*}|| \leq ||A||$.

(7) 関数論におけるリウヴィユの定理を使って $e^{\zeta S^*}Ae^{-\zeta T^*} = A$.

(8) $S^*A = AT^*$.

第 3 章

スペクトル分解

この章では，作用素のスペクトルとスペクトル分解を解説する．これらは作用素論において最も基本的かつ有用な方法論を与える．3.1 節では，行列の固有値の概念を拡張した作用素のスペクトルについて一般的な性質を調べる．線型代数で学んだように，正規行列 A は，固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ と対応する固有空間への互いに直交する射影行列 $P_1, \ldots, P_m$ により，$A = \sum_k \lambda_k P_k$ とスペクトル分解表示できる．無限次元の作用素のスペクトル分解では，連続型のスペクトルが現れるので，$A = \int \lambda dE(\lambda)$ のように積分型に拡張したものを考えなければならない．ここで $E(\cdot)$ は射影作用素を値とするスペクトル測度である．3.2 節では，まず有界な自己共役作用素に対する連続関数カルキュラスを説明してから，スペクトル測度とスペクトル積分の一般論を述べる．さらに，有界な自己共役作用素とユニタリー作用素に対してスペクトル分解定理を証明する．実際は，付録の A.5 節で証明してあるように，スペクトル分解は正規作用素に対してまで成立する．3.3 節では，非有界の自己共役作用素のスペクトル分解と連続な 1 径数ユニタリー群に対するストーンの定理を示す．このために，閉対称作用素のケーリー変換についても説明する．第 4 章以降では非有界作用素を扱わないので，3.3 節は後回しにしても構わない．

3.1 作用素のスペクトル

可逆な $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の全体を $\mathcal{G}$ とおき，可逆でない $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の全体を $\mathcal{S}$ とおく．$\mathcal{G}$ の元は**正則**，$\mathcal{S}$ の元は**特異**ともいう．$I \in \mathcal{G}$ は明らか．$A, B \in \mathcal{G}$ とすると，$(A^{-1})^{-1} = A$，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$，$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ より，

$A^{-1}, AB, A^* \in \mathcal{G}$. したがって $\mathcal{G}$ は作用素の積に関して群をなし，$*$ に関して閉じている.

補題 3.1.1 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が $||I - A|| < 1$ を満たすならば，A は可逆で

$$A^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty}(I - A)^n.$$

証明 $B_n = I + \sum_{k=1}^{n}(I - A)^k$ とおく. $m > n$ として

$$||B_m - B_n|| \leq \sum_{k=n+1}^{m} ||I - A||^k \to 0 \quad (m > n \to \infty)$$

だから，$B = I + \sum_{k=1}^{\infty}(I - A)^k$ が $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に存在して $||B_n - B|| \to 0$.

$$(I - A)B_n = B_n(I - A) = \sum_{k=1}^{n+1}(I - A)^k = B_{n+1} - I.$$

$n \to \infty$ として $(I - A)B = B(I - A) = B - I$. よって $AB = BA = I$ となり，$A \in \mathcal{G}$ で $A^{-1} = B$. ■

命題 3.1.2 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ のノルム位相に関して，$\mathcal{G}$ は開集合であり，$\mathcal{S}$ は閉集合である.

証明 任意の $A_0 \in \mathcal{G}$ に対して，$||A - A_0|| < 1/||A_0^{-1}||$ とすると

$$||A_0^{-1}A - I|| = ||A_0^{-1}(A - A_0)|| \leq ||A_0^{-1}|| \, ||A - A_0|| < 1.$$

補題 3.1.1 より $A = A_0(A_0^{-1}A) \in \mathcal{G}$. よって $\mathcal{G}$ は開集合，それゆえ $\mathcal{S} = \mathcal{G}^c$ は閉集合. ■

命題 3.1.3 $\mathcal{G}$ 上の写像 $A \mapsto A^{-1}$ はノルム連続.

証明 任意の $A_0 \in \mathcal{G}$ に対して，$||A - A_0|| < (2||A_0^{-1}||)^{-1}$ とする. $||A_0^{-1}A - I|| < 1/2$ だから，補題 3.1.1 より

$$\begin{aligned}
||A^{-1}A_0 - I|| &= ||(A_0^{-1}A)^{-1} - I|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||A_0^{-1}A - I||^n \\
&= \frac{||A_0^{-1}A - I||}{1 - ||A_0^{-1}A - I||} \leq 2||A_0^{-1}A - I|| \\
&\leq 2||A_0^{-1}|| \, ||A - A_0||.
\end{aligned}$$

よって

$$||A^{-1} - A_0^{-1}|| \leq ||A^{-1}A_0 - I||\,||A_0^{-1}|| \leq 2||A_0^{-1}||^2||A - A_0||.$$

したがって，$||A - A_0|| \to 0$ ならば $||A^{-1} - A_0^{-1}|| \to 0$. ■

定義 3.1.4 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \in \mathcal{S}\}$$

を A の**スペクトル**という．個々の $\lambda \in \sigma(A)$ を A のスペクトルということもある．また，$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$, i.e.

$$\rho(A) = \{\lambda : \lambda I - A \in \mathcal{G}\}$$

とおく．

命題 3.1.5 $\sigma(A)$ は $\mathbb{C}$ の閉集合であり

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq ||A||\}.$$

証明 $\sigma(A)$ が閉であることは，命題 3.1.2 と写像 $\lambda \mapsto \lambda I - A$ の連続性から明らか．また $|\lambda| > ||A||$ とすると，$||I - (I - \lambda^{-1}A)|| = |\lambda|^{-1}||A|| < 1$ だから，命題 3.1.1 より $I - \lambda^{-1}A \in \mathcal{G}$. よって $\lambda \notin \sigma(A)$. ■

定義 3.1.6 開集合 $\rho(A)$ で定義され，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に値をとる関数

$$A(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$$

を A の**レゾルベント関数**という．

補題 3.1.7 (1) **(レゾルベント等式)**

$$A(\lambda) - A(\mu) = (\mu - \lambda)A(\lambda)A(\mu), \qquad \lambda, \mu \in \rho(A).$$

(2) $A(\cdot)$ は $\rho(A)$ で解析的．

証明 (1)

$$\begin{aligned} A(\lambda) - A(\mu) &= A(\lambda)\{(\mu I - A) - (\lambda I - A)\}A(\mu) \\ &= (\mu - \lambda)A(\lambda)A(\mu). \end{aligned}$$

(2) (1) と命題 3.1.3 より，ノルム収束で

$$\lim_{\lambda\to\mu}\frac{A(\lambda)-A(\mu)}{\lambda-\mu}=-A(\mu)^2.$$

よって $A(\cdot)$ はすべての $\mu\in\rho(A)$ で微分可能，すなわち $\rho(A)$ で解析的である． ■

定理 3.1.8 任意の $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して $\sigma(A)\neq\emptyset$.

証明 $\sigma(A)=\emptyset$ とすると，補題 3.1.7 より任意の $x,y\in\mathcal{H}$ に対して

$$\lim_{\lambda\to\mu}\frac{\langle A(\lambda)x,y\rangle-\langle A(\mu)x,y\rangle}{\lambda-\mu}=-\langle A(\mu)^2x,y\rangle$$

であるから，$\langle A(\cdot)x,y\rangle$ は整関数．$||A(\lambda)||=|\lambda|^{-1}||(I-\lambda^{-1}A)^{-1}||\to 0$ $(|\lambda|\to+\infty)$ より，$\langle A(\cdot)x,y\rangle$ は $\mathbb{C}$ で有界．したがって，関数論におけるリウヴィユの定理より $\langle A(\cdot)x,y\rangle$ は定数．$|\langle A(\lambda)x,y\rangle|\to 0$ $(|\lambda|\to+\infty)$ より $\langle A(\cdot)x,y\rangle\equiv 0$. $x,y\in\mathcal{H}$ は任意だから $A(\cdot)\equiv 0$. これより $0\in\mathcal{G}$ となるが，これは矛盾． ■

命題 3.1.9 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする．

(1) $\sigma(AB)\cup\{0\}=\sigma(BA)\cup\{0\}$.

(2) $\sigma(A^*)=\{\overline{\lambda}:\lambda\in\sigma(A)\}$.

(3) $A\in\mathcal{G}$ のとき $\sigma(A^{-1})=\{\lambda^{-1}:\lambda\in\sigma(A)\}$.

証明 (1) $\lambda\notin\sigma(AB)\cup\{0\}$ とし，$C=(\lambda I-AB)^{-1}$ とおく．$C(\lambda I-AB)=(\lambda I-AB)C=I$ より $CAB=ABC=\lambda C-I$. よって

$$\begin{aligned}(BCA+I)(\lambda I-BA)&=\lambda BCA-BCABA+\lambda I-BA\\&=\lambda BCA-B(\lambda C-I)A+\lambda I-BA=\lambda I.\end{aligned}$$

同様にして $(\lambda I-BA)(BCA+I)=\lambda I$. よって $(\lambda I-BA)^{-1}=\lambda^{-1}(BCA+I)$ となり $\lambda\notin\sigma(BA)\cup\{0\}$. したがって $\sigma(BA)\cup\{0\}\subset\sigma(AB)\cup\{0\}$. A,B の対称性より逆も成立．

(2) $(\lambda I-A)^*=\overline{\lambda}I-A^*$ より，$\lambda I-A\in\mathcal{G}\Longleftrightarrow\overline{\lambda}I-A^*\in\mathcal{G}$. つまり $\lambda\in\sigma(A)\Longleftrightarrow\overline{\lambda}\in\sigma(A^*)$.

(3) $A\in\mathcal{G}\Longleftrightarrow 0\notin\sigma(A)$ より，$\lambda\neq 0$ としてよい．$\lambda^{-1}I-A^{-1}=\lambda^{-1}A^{-1}(A-\lambda I)$ より，$\lambda I-A\in\mathcal{G}\Longleftrightarrow\lambda^{-1}I-A^{-1}\in\mathcal{G}$. よって $\lambda\in\sigma(A)\Longleftrightarrow\lambda^{-1}\in\sigma(A^{-1})$. ■

命題 3.1.10 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ と複素係数多項式 p に対して

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) \ (= \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}).$$

ただし，$p(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \zeta^k$ に対して

$$p(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_n A^n$$

とする．

証明 任意の $\mu \in \mathbb{C}$ に対して，$p(\zeta) - \mu$ を $p(\zeta) - \mu = \alpha \prod_{k=1}^{n} (\zeta - \mu_k)$ (ただし $\alpha \neq 0$) と因数分解する．このとき $p(A) - \mu I = \alpha \prod_{k=1}^{n} (A - \mu_k I)$. いま，$p(A) - \mu I \in \mathcal{G}$ とし $B = (p(A) - \mu I)^{-1}$ とおくと，各 $k = 1, \ldots, n$ について

$$I = B(p(A) - \mu I) = B\left(\alpha \prod_{j \neq k} (A - \mu_j I)\right)(A - \mu_k I),$$

$$I = (p(A) - \mu I)B = (A - \mu_k I)\left(\alpha \prod_{j \neq k} (A - \mu_j I)\right)B.$$

よって $A - \mu_k I$ は左逆元および右逆元をもつから可逆である．逆に，各 $k = 1, \ldots, n$ について $A - \mu_k I \in \mathcal{G}$ ならば，明らかに $p(A) - \mu I \in \mathcal{G}$ となる．したがって $\mu \in \sigma(p(A))$ は，ある k で $\mu_k \in \sigma(A)$ であることと同値．$p(\mu_k) = \mu$ より $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$ が従う． ■

定義 3.1.11 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

とおき，A の**スペクトル半径**という．

命題 3.1.5 と命題 3.1.9 (1) より，任意の $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して次が成立：

$$r(A) \leq ||A||, \tag{3.1}$$

$$r(AB) = r(BA). \tag{3.2}$$

さらに，次の公式が成立する．

定理 3.1.12

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n}.$$

証明 命題 3.1.10 より $\sigma(A^n) = \{\lambda^n : \lambda \in \sigma(A)\}$. よって $r(A)^n = r(A^n) \le \|A^n\|$ だから $r(A) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n}$. 他方，補題 3.1.1 より，$|\lambda| > \|A\|$ のとき

$$A(\lambda) = \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}A)^{-1} = \lambda^{-1}\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}\right).$$

任意の $f \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^*$ に対して

$$f(A(\lambda)) = \lambda^{-1}\left(f(I) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(A^n)}{\lambda^n}\right)$$

は $\rho(A)$ で解析的で，$\{\lambda : |\lambda| > r(A)\} \subset \rho(A)$ であるから，上のローラン展開は $|\lambda| > r(A)$ で収束する．よって $|\lambda| > r(A)$ ならば $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f(A^n/\lambda^n)| < +\infty$. 系 1.3.4 (2) より $\sup_n \|A^n/\lambda^n\| = \alpha < +\infty$. したがって $\|A^n\|^{1/n} \le \alpha^{1/n}|\lambda|$ となり $\limsup_n \|A^n\|^{1/n} \le |\lambda|$. ゆえに

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \le r(A) \le \inf_n \|A^n\|^{1/n} \le \liminf_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

これより結論がいえる． ■

特に A がべき零，すなわち，ある $n \in \mathbb{N}$ で $A^n = 0$ ならば $r(A) = 0$.

命題 3.1.13 A が正規作用素ならば $r(A) = \|A\|$.

証明 $A^*A = AA^*$ だから，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|A^{2^n}\|^2 = \|(A^{2^n})^* A^{2^n}\| = \|(A^*)^{2^n} A^{2^n}\| = \|(A^*A)^{2^n}\|.$$

よって

$$\|A^{2^n}\|^2 = \|(A^*A)^{2^n}\| = \|(A^*A)^{2^{n-1}}\|^2 = \cdots = \|A^*A\|^{2^n} = \|A\|^{2^{n+1}}$$

となるから $\|A^{2^n}\|^{1/2^n} = \|A\|$. 定理 3.1.12 より

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^{2^n}\|^{1/2^n} = \|A\|. \quad ■$$

次の命題が示すように，作用素の種類に応じて，そのスペクトルは特定の領域に含まれる．

命題 3.1.14　(1) U がユニタリーならば $\sigma(U) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

(2) A が自己共役ならば $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

(3) $A \geq 0$ ならば $\sigma(A) \subset [0, \infty)$.

(4) P が射影ならば $\sigma(P) \subset \{0, 1\}$.

証明　(1) $\lambda \in \sigma(U)$ とすると $|\lambda| \leq ||U|| = 1$. 他方，命題 3.1.9 (3) より $|\lambda^{-1}| \leq ||U^{-1}|| = 1$. よって $|\lambda| = 1$.

(2) については，より強い結果を次の定理で示す.

(3) 定理 2.2.1 より $A = (A^{1/2})^2$. 命題 3.1.10 と (2) より，$\sigma(A) = \{\lambda^2 : \lambda \in \sigma(A^{1/2})\} \subset [0, \infty)$.

(4) $\lambda \in \sigma(P)$ とすると，$P - P^2 = 0$ だから，再び命題 3.1.10 より $\lambda - \lambda^2 = 0$. よって $\lambda = 0$ または $\lambda = 1$. ■

上の命題の (1)–(4) について，逆は一般に不成立. しかし，各作用素が正規であると仮定すれば逆も成立することに注意する.

補題 3.1.15　$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について，$\overline{\mathrm{ran}}\, A = \mathcal{H}$ かつ

$$||Ax|| \geq \alpha ||x||, \qquad x \in \mathcal{H} \tag{3.3}$$

となる $\alpha > 0$ が存在するならば $A \in \mathcal{G}$.

証明　(3.3) より A は単射である. 任意の $y \in \mathcal{H}$ に対して，$\overline{\mathrm{ran}}\, A = \mathcal{H}$ より $\{x_n\}$ がとれて $||Ax_n - y|| \to 0$. このとき，(3.3) より

$$\alpha ||x_m - x_n|| \leq ||A(x_m - x_n)|| \leq ||Ax_m - y|| + ||y - Ax_n|| \to 0$$

となり，$\{x_n\}$ はコーシー列. よって $x = \lim x_n$ が存在し，$y = \lim Ax_n = Ax \in \mathrm{ran}\, A$. したがって A は全射. 逆写像 A^{-1} は (3.3) より $||A^{-1}x|| \leq \alpha^{-1}||x||$ を満たす. よって $A \in \mathcal{G}$. (この最後の部分は系 1.3.6 からもわかる.) ■

定理 3.1.16　A を自己共役作用素とし，$m_A = \inf_{||x||=1} \langle Ax, x \rangle$, $M_A = \sup_{||x||=1} \langle Ax, x \rangle$ とする. このとき，$\sigma(A) \subset [m_A, M_A]$ かつ $m_A, M_A \in \sigma(A)$. さらに $||A|| = \max\{M_A, -m_A\}$.

証明 $\lambda=\alpha+i\beta$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \beta\neq 0)$ とすると

$$||(\lambda I-A)x||\,||x||\geq|\langle(\alpha I-A)x,x\rangle+i\beta\langle x,x\rangle|\geq|\beta|\,||x||^2$$

となるから $||(\lambda I-A)x||\geq|\beta|\,||x||$. 同様に $||(\lambda I-A)^*x||\geq|\beta|\,||x||$. よって $(\lambda I-A)^*$ は単射であり，命題 2.1.6 より $\overline{\mathrm{ran}}(\lambda I-A)=\mathcal{H}$. 前補題より $\lambda I-A\in\mathcal{G}$, i.e. $\lambda\notin\sigma(A)$. したがって $\sigma(A)\subset\mathbb{R}$. 次に，$\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda<m_A$ とすると

$$||(\lambda I-A)x||\,||x||\geq|\langle Ax,x\rangle-\lambda\langle x,x\rangle|\geq(m_A-\lambda)||x||^2$$

となるから，$\lambda I-A$ は単射であり，$\overline{\mathrm{ran}}(\lambda I-A)=(\ker(\lambda I-A))^{\perp}=\mathcal{H}$. ゆえに前補題より $\lambda\notin\sigma(A)$. $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda>M_A$ のときも，同様にして $\lambda\notin\sigma(A)$. したがって $\sigma(A)\subset[m_A,M_A]$.

$\alpha\in\mathbb{R}$ に対して，$m_{A+\alpha I}=m_A+\alpha$, $M_{A+\alpha I}=M_A+\alpha$, $\sigma(A+\alpha I)=\sigma(A)+\alpha$. いま，$m_A+\alpha\geq 0$ となる α をとると，$\sigma(A+\alpha I)\subset[m_A+\alpha,M_A+\alpha]$ であり，命題 2.1.14 より

$$||A+\alpha I||=\sup_{||x||=1}|\langle(A+\alpha I)x,x\rangle|=M_A+\alpha.$$

よって，命題 3.1.13 より $M_A+\alpha\in\sigma(A+\alpha I)$ であるから $M_A\in\sigma(A)$. また，$-m_A=M_{-A}\in\sigma(-A)=-\sigma(A)$ だから $m_A\in\sigma(A)$. 定理の最後の主張は命題 3.1.13 より明らか. ■

作用素のスペクトルは次のようにいくつかの種類に分類される.

定義 3.1.17 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\lambda\in\mathbb{C}$ とする.

(1) λ が A の**固有値**または**点スペクトル**とは，$\ker(\lambda I-A)\neq\{0\}$ となることである. このとき，$Ax=\lambda x$ となる $x\,(\neq 0)\in\mathcal{H}$ を λ に対する A の**固有ベクトル**，$\ker(\lambda I-A)$ を λ の**固有空間**，$\dim\ker(\lambda I-A)$ を λ の**重複度**という.

(2) λ が A の**剰余スペクトル**とは，$\ker(\lambda I-A)=\{0\}$ かつ $\overline{\mathrm{ran}}(\lambda I-A)\neq\mathcal{H}$ となることである.

(3) λ が A の**連続スペクトル**とは，$\ker(\lambda I-A)=\{0\}$ かつ $\overline{\mathrm{ran}}(\lambda I-A)=\mathcal{H}\neq\mathrm{ran}(\lambda I-A)$ となることである.

(4) λ が A の**近似点スペクトル**とは，$||x_n||=1$ である $\mathcal{H}$ の点列 $\{x_n\}$ が存在して $||Ax_n-\lambda x_n||\to 0$ となることである.

(5) 上に挙げた点スペクトル，剰余スペクトル，連続スペクトル，近似点スペクトルの全体をそれぞれ $\sigma_{\mathrm{p}}(A)$, $\sigma_{\mathrm{r}}(A)$, $\sigma_{\mathrm{c}}(A)$, $\sigma_{\mathrm{ap}}(A)$ で表す.

例 3.1.18 $\dim \mathcal{H} = n < \infty$ のとき，命題 2.1.7 より $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = M_n(\mathbb{C})$ と同一視できる. $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して，$\lambda \in \sigma(A) \Longleftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0$. ただし det は行列式を表す. また $\det(\lambda I - A) = 0$ ならば，$x\,(\neq 0) \in \mathbb{C}^n$ がとれて $Ax = \lambda x$. $\det(\lambda I - A)$ が λ の n 次多項式だから，$\sigma(A)$ は高々 n 個の固有値からなる.

命題 3.1.19 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする.

(1) $\lambda \notin \sigma(A) \Longleftrightarrow \ker(\lambda I - A) = \{0\}$ かつ $\mathrm{ran}(\lambda I - A) = \mathcal{H}$.

(2) $\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A) \cup \sigma_{\mathrm{r}}(A) \cup \sigma_{\mathrm{c}}(A)$ (互いに素).

(3) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{r}}(A) \Longrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_{\mathrm{p}}(A^*)$.

(4) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A) \Longrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_{\mathrm{r}}(A^*) \cup \sigma_{\mathrm{p}}(A^*)$.

(5) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(A) \Longleftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_{\mathrm{c}}(A^*)$.

(6) A が正規ならば $\sigma_{\mathrm{r}}(A) = \emptyset$.

証明 (1) 系 1.3.6 より.

(2) (1) と定義 3.1.17 より.

(3) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{r}}(A)$ とすれば，$\overline{\mathrm{ran}}(\lambda I - A) \neq \mathcal{H}$ より $\ker(\overline{\lambda} I - A^*) = (\overline{\mathrm{ran}}(\lambda I - A))^{\perp} \neq \{0\}$. よって $\overline{\lambda} \in \sigma_{\mathrm{p}}(A^*)$.

(4) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ として，$\overline{\lambda} \notin \sigma_{\mathrm{r}}(A^*) \cup \sigma_{\mathrm{p}}(A^*)$ と仮定する. (2) より $\overline{\lambda} \in \sigma_{\mathrm{c}}(A^*)$ だから $\overline{\mathrm{ran}}(\overline{\lambda} I - A^*) = \mathcal{H}$. よって $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$ となり矛盾.

(5) (2), (3), (4) より容易.

(6) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{r}}(A)$ とすると，(3) より $\overline{\lambda} \in \sigma_{\mathrm{p}}(A^*)$. $\lambda I - A$ が正規だから，命題 2.1.11 より $\ker(\lambda I - A) = \ker(\overline{\lambda} I - A^*) \neq \{0\}$. よって $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A) \cap \sigma_{\mathrm{r}}(A)$ となり矛盾. ■

定理 3.1.20 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする.

(1) $\sigma_{\mathrm{p}}(A) \cup \sigma_{\mathrm{c}}(A) \subset \sigma_{\mathrm{ap}}(A) \subset \sigma(A)$.

(2) A が正規ならば $\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{ap}}(A)$.

(3) $\sigma_{\mathrm{ap}}(A)$ は閉集合.

(4) $\partial\sigma(A) \subset \sigma_{\mathrm{ap}}(A)$. ただし $\partial\sigma(A)$ は $\sigma(A)$ の境界.

証明 (1) $\lambda \in \sigma_{\rm ap}(A)$ とすると，$\|x_n\| = 1$ となる $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ が存在して $\|(\lambda I - A)x_n\| \to 0$. いま，$\lambda \notin \sigma(A)$ と仮定すると

$$\|x_n\| \le \|(\lambda I - A)^{-1}\| \, \|(\lambda I - A)x_n\| \to 0$$

となり矛盾．よって $\sigma_{\rm ap}(A) \subset \sigma(A)$. 次に，$\sigma_{\rm p}(A) \cup \sigma_{\rm c}(A) \subset \sigma_{\rm ap}(A)$ を示す．$\sigma_{\rm p}(A) \subset \sigma_{\rm ap}(A)$ は明らか．$\lambda \in \sigma_{\rm c}(A)$ とすると，補題 3.1.15 より $\inf_{\|x\|=1} \|(\lambda I - A)x\| = 0$. これは $\lambda \in \sigma_{\rm ap}(A)$ を意味する．

(2) 命題 3.1.19 (6) と (1) より明らか．

(3) $\lambda \notin \sigma_{\rm ap}(A)$ とすると，$\alpha > 0$ が存在して $\|(\lambda I - A)x\| \ge \alpha\|x\|$. $|\mu - \lambda| < \alpha$ ならば，$\|(\lambda I - A)x\| \le \|(\lambda - \mu)x\| + \|(\mu I - A)x\|$ だから

$$\|(\mu I - A)x\| \ge (\alpha - |\lambda - \mu|)\|x\|, \qquad x \in \mathcal{H}.$$

よって $\mu \notin \sigma_{\rm ap}(A)$ となり，$\sigma_{\rm ap}(A)$ は閉集合．

(4) まず，$\{B_n\} \subset \mathcal{G}, B \in \mathcal{S}$ が $\|B_n - B\| \to 0$ を満たすならば $0 \in \sigma_{\rm ap}(B)$ となることを示す．$B \in \mathcal{S}$ より $0 \in \sigma(B)$ であるが，$0 \notin \sigma_{\rm ap}(B)$ と仮定すると (1) より $0 \in \sigma_{\rm r}(B)$. よって $\overline{\operatorname{ran}} B \ne \mathcal{H}$ だから $y\,(\ne 0) \in (\operatorname{ran} B)^\perp$ がとれる．$x_n = B_n^{-1}y/\|B_n^{-1}y\|$ とおくと，$\|x_n\| = 1$ となり，$B_n x_n \in (\operatorname{ran} B)^\perp$ だから

$$\|Bx_n\|^2 \le \|B_n x_n\|^2 + \|Bx_n\|^2 = \|(B_n - B)x_n\|^2 \le \|B_n - B\|^2 \to 0.$$

よって $\|Bx_n\| \to 0$ となり $0 \in \sigma_{\rm ap}(B)$. これは矛盾．さて $\lambda \in \partial\sigma(A)$ とすると，$\{\lambda_n\} \subset \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ がとれて $\lambda_n \to \lambda$. $\{\lambda_n I - A\} \subset \mathcal{G}$, $\lambda I - A \in \mathcal{S}$ であり，$\|(\lambda_n I - A) - (\lambda I - A)\| = |\lambda_n - \lambda| \to 0$. 上で示したことから $0 \in \sigma_{\rm ap}(\lambda I - A)$. つまり $\lambda \in \sigma_{\rm ap}(A)$. ■

例 3.1.21 例 2.1.18 で定義した ℓ^2 上の片側シフト作用素 V と V^* のスペクトルについては，次の表にまとめられる：

	$\sigma_{\rm p}$	$\sigma_{\rm r}$	$\sigma_{\rm c}$	$\sigma_{\rm ap}$
V	$\emptyset$	$\|\lambda\| < 1$	$\|\lambda\| = 1$	$\|\lambda\| = 1$
V^*	$\|\lambda\| < 1$	$\emptyset$	$\|\lambda\| = 1$	$\|\lambda\| \le 1$

証明 (1) $x = (\xi_n) \in \ell^2$ で $Vx = \lambda x$ とすると，$(0, \xi_1, \xi_2, \ldots) = (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \lambda\xi_3, \ldots)$. $\lambda\xi_1 = 0$, $\xi_1 = \lambda\xi_2$, $\xi_2 = \lambda\xi_3$, ... だから $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = 0$, つまり $x = 0$ がわかる．よって $\sigma_{\rm p}(V) = \emptyset$.

(2) (1) と命題 3.1.19 (3) より $\sigma_{\mathrm{r}}(V^*) = \emptyset$.

(3) $|\lambda| < 1$ のとき，$x = (1, \lambda, \lambda^2, \dots) \in \ell^2$ で $V^*x = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots) = \lambda x$ となる．よって $\{\lambda : |\lambda| < 1\} \subset \sigma_{\mathrm{p}}(V^*)$. さらに $||V^*|| = 1$ より $\sigma(V^*) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$.

(4) (1), (3) と命題 3.1.19 (4) より $\{\lambda : |\lambda| < 1\} \subset \sigma_{\mathrm{r}}(V)$. さらに $||V|| = 1$ より $\sigma(V) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$.

(5) $x = (\xi_n) \in \ell^2$ が $V^*x = \lambda x$ のとき，$\xi_2 = \lambda\xi_1$, $\xi_3 = \lambda\xi_2$, $\dots$ だから $x = (\xi_1, \lambda\xi_1, \lambda^2\xi_1, \dots)$. $|\lambda| = 1$ とすると，$x \in \ell^2$ となるのは $\xi_1 = 0$ で $x = 0$ に限る．よって $|\lambda| = 1$ ならば $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(V^*)$. これと (2), (3) より $\sigma_{\mathrm{c}}(V^*) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$. また，命題 3.1.19 (5) より $\sigma_{\mathrm{c}}(V)$ も同じ．以上より σ_{ap} の部分を除いた表のすべてが示せた．

σ_{ap} については，V が等距離作用素だから，$\sigma_{\mathrm{ap}}(V) \subset \{\lambda : |\lambda| = 1\}$. $\sigma_{\mathrm{c}}(V) \subset \sigma_{\mathrm{ap}}(V)$ と合わせて $\sigma_{\mathrm{ap}}(V) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$. また $\sigma_{\mathrm{p}}(V^*) \subset \sigma_{\mathrm{ap}}(V^*)$ で $\sigma_{\mathrm{ap}}(V^*)$ が閉集合だから，$\sigma_{\mathrm{ap}}(V^*) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$. ■

3.2　有界作用素のスペクトル分解

この節では，特に断らない限り，$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は自己共役とする．複素係数多項式の全体を $\mathbb{P}$ で表す．$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ と $p \in \mathbb{P}$ に対して，命題 3.1.10 においてと同じく $p(A)$ を定める．

補題 3.2.1　任意の $p, q \in \mathbb{P}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して次が成立：

(i) $(p+q)(A) = p(A) + q(A)$, $(\alpha p)(A) = \alpha p(A)$,

(ii) $(pq)(A) = p(A)q(A)$, $\overline{p}(A) = p(A)^*$,

(iii) $||p(A)|| = ||p||$. ただし $||p||$ は $C(\sigma(A))$ の元としてのノルム．

証明　(i) と (ii) の 1 番目は明らか．(ii) の 2 番目は，$p(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$ とすると，$\overline{p}(A) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\alpha}_k A^k = (\sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k)^* = p(A)^*$.

(iii) $p(A)$ は正規だから，命題 3.1.13, 3.1.10 を使うと

$$||p(A)|| = r(p(A)) = \sup\{|p(t)| : t \in \sigma(A)\} = ||p||. \quad ■$$

定理 3.2.2 (連続関数カルキュラス)　次の性質をもつ写像 $\Phi : C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が一意的に存在する：任意の $f, g \in C(\sigma(A))$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

(i) $\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$, $\Phi(\alpha f) = \alpha\Phi(f)$ (Φ は線型),
(ii) $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$, $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$ (Φ は $*$-準同型),
(iii) $||\Phi(f)|| = ||f||$ (Φ は等距離),
(iv) $\Phi(1) = I$, $\Phi(f_0) = A$. ただし $f_0(t) = t$.

証明 $\Phi_0 : \mathbb{P} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $\Phi_0(p) = p(A)$ と定めると，補題 3.2.1 より Φ_0 は $p, q \in \mathbb{P}$ に対して上の (i)–(iv) を満たす．命題 3.1.14 (2) より $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ だから，ワイエルシュトラスの多項式近似 (系 A.4.6 (1)) より，$\mathbb{P}$ は $C(\sigma(A))$ で稠密である．したがって Φ_0 は等距離線型写像 $\Phi : C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に一意に拡張される．このとき，Φ が (ii) を満たすことを示すために，任意の $f, g \in C(\sigma(A))$ に対して，$||p_n - f|| \to 0$, $||q_n - g|| \to 0$ となる $\{p_n\}, \{q_n\} \subset \mathbb{P}$ をとる．$||\Phi_0(p_n) - \Phi(f)|| \to 0$, $||\Phi_0(q_n) - \Phi(g)|| \to 0$ であり，さらに $||p_n q_n - fg|| \to 0$ より $||\Phi_0(p_n q_n) - \Phi(fg)|| \to 0$. よって

$$\begin{aligned}&||\Phi(fg) - \Phi(f)\Phi(g)|| \\ &\quad \le ||\Phi(fg) - \Phi_0(p_n q_n)|| + ||\Phi_0(p_n)\Phi_0(q_n) - \Phi(f)\Phi(g)|| \to 0\end{aligned}$$

となるから $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$. $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$ も同様に示せる．

次に Φ の一意性を示す．いま Ψ も (i)–(iv) を満たすとする．任意の $p \in \mathbb{P}$, $p(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$ に対して，(i), (ii), (iv) より

$$\Psi(p) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \Psi(f_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k = \Phi(p).$$

$\mathbb{P}$ の稠密性と (iii) より，任意の $f \in C(\sigma(A))$ に対して $\Psi(f) = \Phi(f)$ が従う．■

定義 3.2.3 定理 3.2.2 の Φ を用いて，任意の $f \in C(\sigma(A))$ に対して $f(A) = \Phi(f)$ と定義し，A の f による**連続関数カルキュラス**と呼ぶ．これは $p \in \mathbb{P}$ に対する $p(A)$ の拡張になっている．

2.2 節で与えた作用素の平方根および絶対値が連続関数カルキュラスの例になっていることを次に示す．

命題 3.2.4 (1) $f \in C(\sigma(A))$, $f \ge 0$ ならば $f(A) \ge 0$.
(2) $A \ge 0$, $f_1(t) = \sqrt{t}$ ならば $f_1(A) = A^{1/2}$.
(3) $f_2(t) = |t|$ ならば $f_2(A) = |A|$.

証明　(1) $f \geq 0$ より $g = \sqrt{f} \in C(\sigma(A))$ がとれて $f = g^2 = \overline{g}g$. よって $f(A) = g(A)^*g(A) \geq 0$.

(2) $A \geq 0$ のとき，命題 3.1.14 (3) より $f_1(t) = \sqrt{t} \in C(\sigma(A))$. $f_0 = f_1^2$ だから $A = f_0(A) = f_1(A)^2$. (1) より $f_1(A) \geq 0$ だから $f_1(A) = A^{1/2}$.

(3) $f_2^2 = f_0^2$ より $f_2(A)^2 = A^2 = |A|^2$. $f_2(A) \geq 0$ だから $f_2(A) = |A|$. ■

連続関数カルキュラスの1つの応用として次を示す.

命題 3.2.5 (ジョルダン分解)　自己共役な $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，次の性質をもつ $A_+, A_- \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が一意的に存在する：

(i) $A_+ \geq 0$, $A_- \geq 0$,

(ii) $A_+A_- = 0$,

(iii) $A = A_+ - A_-$.

このとき $|A| = A_+ + A_-$.

証明　$f_+(t) = \max\{t, 0\}$, $f_-(t) = \max\{-t, 0\}$ とおけば，$f_+, f_- \in C(\sigma(A))$ であり，$f_+, f_- \geq 0$, $f_+f_- = 0$, $f_0 = f_+ - f_-$. したがって，$A_+ = f_+(A)$, $A_- = f_-(A)$ とすると (i)–(iii) が成立. また，$|t| = f_+(t) + f_-(t)$ より $|A| = A_+ + A_-$ が従う.

次に一意性を示そう. $B, C \geq 0$, $BC = 0$, $A = B - C$ とする. $AB = B^2 = BA$ であり，A_+, A_- は A の多項式のノルム極限であるから，B は A_+, A_- と可換である. $A_+ - A_- = B - C$ の両辺に BA_- を掛けると $-BA_-^2 = B^2A_-$. よって $BA_-B + A_-BA_- = 0$. ここで，$BA_-B, A_-BA_- \geq 0$ だから $BA_-B = 0$. よって $A_-B = 0$. 同様に $A_+C = 0$ も成立. したがって

$$B^2 = AB = A_+B = A_+A = A_+^2.$$

$B, A_+ \geq 0$ より $B = A_+$ であり，それゆえ $C = A_-$. ■

上の $A = A_+ - A_-$ を A の**ジョルダン分解**という.

定理 3.2.6 (解析関数カルキュラス)　$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は任意とし，$\sigma(A)$ を含む開集合 D_f で解析的な関数 f の全体を $\mathcal{A}(\sigma(A))$ で表す. 任意の $f \in \mathcal{A}(\sigma(A))$ に対して，D_f に含まれ $\sigma(A)$ を正の向きに囲む有限個の閉路の集まり $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ を，各 γ_k が残りの γ_j の外部にあるようにとる. $f(A)$ を

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta)(\zeta I - A)^{-1}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\int_{\gamma_k} f(\zeta)(\zeta I - A)^{-1}d\zeta \quad (3.4)$$

と定義する．このとき，$f(A)$ は Γ のとり方によらず定まり，次が成立．

(1) $f \mapsto f(A)$ は $\mathcal{A}(\sigma(A))$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への準同型写像，つまり線型写像で積を保存する．

(2) $1(A) = I$, $f_0(A) = A$. ただし $1(\zeta) = 1$, $f_0(\zeta) = \zeta$.

(3) A が自己共役のとき，任意の $f \in \mathcal{A}(\sigma(A))$ に対して $f(A)$ は定義 3.2.3 のそれと一致する．

証明 $f \in \mathcal{A}(\sigma(A))$ に対して，$\tilde{\Gamma} = \{\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_l\}$ も $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ と同じ条件でとられたとして

$$\int_\Gamma f(\zeta)(\zeta I - A)^{-1} d\zeta = \int_{\tilde{\Gamma}} f(\zeta)(\zeta I - A)^{-1} d\zeta \tag{3.5}$$

を示す．ここで，各 γ_j が各 $\tilde{\gamma}_k$ と交わらないとして十分である．$\tilde{\gamma}_k^{-1}$ を $\tilde{\gamma}_k$ を逆向きにした閉路とすると，$\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \tilde{\gamma}_1^{-1}, \ldots, \tilde{\gamma}_l^{-1}\}$ は $D_f \setminus \sigma(A)$ 内の閉路の集まりで，解析関数 $f(\zeta)(\zeta I - A)^{-1}$ についてコーシーの積分定理が適用可能である．よって

$$\sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(\zeta)(\zeta I - A)^{-1} d\zeta + \sum_{k=1}^l \int_{\tilde{\gamma}_k^{-1}} f(\zeta)(\zeta I - A)^{-1} d\zeta = 0$$

となるから (3.5) が成立．したがって $f(A)$ の定義は Γ のとり方に依存しない．

(1) $f \mapsto f(A)$ の線型性は明らか．$f, g \in \mathcal{A}(\sigma(A))$ に対して，$\sigma(A)$ を囲む $D_f \cap D_g$ 内の閉路の集まり $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$, $\tilde{\Gamma} = \{\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_m\}$ を，各 $\tilde{\gamma}_k$ が γ_k の内部にあるようにとる．このとき，レゾルベント等式 (補題 3.1.7) より

$$\begin{aligned}
f(A)g(A) &= -\frac{1}{4\pi^2}\left(\int_\Gamma f(\zeta)A(\zeta)d\zeta\right)\left(\int_{\tilde{\Gamma}} g(\lambda)A(\lambda)d\lambda\right) \\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\sum_{j,k=1}^m \int_{\gamma_j}\int_{\tilde{\gamma}_k} f(\zeta)g(\lambda)\frac{A(\zeta)-A(\lambda)}{\lambda-\zeta} d\lambda d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j,k=1}^m \int_{\gamma_j} f(\zeta)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_k}\frac{g(\lambda)}{\lambda-\zeta}d\lambda\right)A(\zeta)d\zeta \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi i}\sum_{j,k=1}^m \int_{\tilde{\gamma}_k} g(\lambda)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{f(\zeta)}{\zeta-\lambda}d\zeta\right)A(\lambda)d\lambda.
\end{aligned}$$

上の最後の式で，第 1 項のカッコ内の積分は 0 であり，第 2 項のカッコ内は $j=k$ のとき $f(\lambda)$, $j \neq k$ のとき 0 である．よって

$$f(A)g(A) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\int_{\tilde{\gamma}_k} f(\lambda)g(\lambda)A(\lambda)d\lambda = (fg)(A).$$

したがって $f \mapsto f(A)$ は準同型．

(2) $r > ||A||$ をとり γ を閉路 $|\zeta| = r$ とすると，$f(\zeta) = \zeta^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ について

$$\begin{aligned} f(A) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \zeta^k(\zeta I - A)^{-1}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \zeta^{k-1}\Big(I - \frac{A}{\zeta}\Big)^{-1}d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta^{n-k+1}}\Big)A^n. \end{aligned}$$

$(2\pi i)^{-1}\int_\gamma \zeta^{-(n-k+1)}d\zeta$ は $n = k$ のとき 1, $n \neq k$ のとき 0 であるから，$f(A) = A^k$ を得る．特に $1(A) = I$, $f_0(A) = A$.

(3) $f \in \mathcal{A}(\sigma(A))$ に対して，D_f 内の Γ をとり $B = (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma f(\zeta)(\zeta I - A)^{-1}d\zeta$ とおく．定理 3.2.2 より $X = \Phi(C(\sigma(A)))$ は $C(\sigma(A))$ と等距離同型なバナッハ空間である．$\zeta \in \Gamma$ のとき $(\zeta I - A)^{-1} = \Phi((\zeta - f_0)^{-1}) \in X$ であるから，$B \in X$ がわかる．したがって，ある $g \in C(\sigma(A))$ により $B = \Phi(g)$. $\lambda \in \sigma(A)$ を任意にとって，$h \in C(\sigma(A))$ に対して $\hat{\lambda}(\Phi(h)) = h(\lambda)$ と定めると，$\hat{\lambda} \in X^*$ となる．$\zeta \in \Gamma$ のとき $\hat{\lambda}((\zeta I - A)^{-1}) = (\zeta - f_0)^{-1}(\lambda) = (\zeta - \lambda)^{-1}$ だから

$$g(\lambda) = \hat{\lambda}(B) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - \lambda}d\zeta = f(\lambda).$$

よって $g = f|\sigma(A)$ となり $B = \Phi(f)$. これで結論が示せた． ■

命題 3.1.10 は次のように一般化される．

定理 3.2.7 (スペクトル写像定理) (1) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が自己共役のとき，任意の $f \in C(\sigma(A))$ に対して

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)). \tag{3.6}$$

(2) 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ と $f \in \mathcal{A}(\sigma(A))$ に対して，$f(A)$ を (3.4) で定めると (3.6) が成立する．

証明 (1) $\mu \notin f(\sigma(A))$ を任意に固定して $g(\zeta) = (\mu - f(\zeta))^{-1}$ とおくと，$g \in C(\sigma(A))$ であり，$g(\mu - f) = 1$ より $g(A)(\mu I - f(A)) = (\mu I - f(A))g(A) = I$. よって $g(A) = (\mu I - f(A))^{-1}$ となり $\mu \notin \sigma(f(A))$.

逆に $\mu \notin \sigma(f(A))$ とする．$\|p_n - f\| \to 0$ となる $\{p_n\} \subset \mathbb{P}$ をとると

$$\|(\mu I - p_n(A)) - (\mu I - f(A))\| = \|p_n(A) - f(A)\| = \|p_n - f\| \to 0$$

であるから，命題 3.1.2 より，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_0$ ならば $\mu I - p_n(A) \in \mathcal{G}$. このとき，$\mu \notin \sigma(p_n(A)) = p_n(\sigma(A))$ (命題 3.1.10). そこで $g_n \in C(\sigma(A))$ $(n \geq n_0)$ を $g_n(\zeta) = (\mu - p_n(\zeta))^{-1}$ と定めると，$g_n(A) = (\mu I - p_n(A))^{-1}$ であり，命題 3.1.3 より

$$\|g_n - g\| = \|g_n(A) - g(A)\| = \|(\mu I - p_n(A))^{-1} - (\mu I - f(A))^{-1}\| \to 0.$$

したがって，$g_n(\mu - p_n) = 1$ の極限をとって $g(\mu - f) = 1$. これより $\mu \notin f(\sigma(A))$.

(2) は演習問題とする． ■

定義 3.2.8 $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間，つまり $\mathcal{F}$ を集合 Ω の部分集合からなる 1 つの σ-集合体とする．$\mathcal{H}$ 上の射影作用素の全体を $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ で表す．写像 $E : \mathcal{F} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ が

(i) $E(\Omega) = I$,

(ii) (可算加法性) 互いに素な $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ に対して

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(S_n) \quad (\text{強収束})$$

を満たすとき，E を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の**スペクトル測度**という．

補題 3.2.9 E を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上のスペクトル測度とする．

(1) $E(\emptyset) = 0$.

(2) (有限加法性) $R, S \in \mathcal{F}$ が互いに素ならば，$E(R \cup S) = E(R) + E(S)$, $E(R) \perp E(S)$.

(3) 任意の $R, S \in \mathcal{F}$ に対して $E(R \cap S) = E(R)E(S) = E(S)E(R)$.

証明 (1) 定義 3.2.8 (ii) で $S_n = \emptyset$ $(n \in \mathbb{N})$ とすると

$$E(\emptyset) = \text{s-}\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} E(\emptyset) = \text{s-}\lim_{N \to \infty} N E(\emptyset).$$

よって $E(\emptyset)=0$.

(2) $R, S \in \mathcal{F}$, $R \cap S = \emptyset$ とする．定義 3.2.8 (ii) で $S_1 = R$, $S_2 = S$, $S_n = \emptyset$ $(n \geq 3)$ として，$E(R \cup S) = E(R) + E(S)$. よって命題 2.1.21 より $E(R) \perp E(S)$.

(3) (2) より

$$E(R \cup S) = E(R \cap S) + E(R \setminus S) + E(S \setminus R).$$

命題 2.1.22, 2.1.21 より

$$\begin{aligned} E(R) &= E(R)E(R \cup S) \\ &= E(R)E(R \cap S) + E(R)E(R \setminus S) + E(R)E(S \setminus R) \\ &= E(R \cap S) + E(R \setminus S). \end{aligned}$$

よって

$$E(R)E(S) = E(R \cap S)E(S) + E(R \setminus S)E(S) = E(R \cap S).$$

また，$E(S)E(R) = E(S \cap R) = E(R \cap S)$. ■

定義 3.2.10 (1) 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の有界な複素数値可測関数の全体を $B(\Omega)$ で表す．ノルム $||f|| = \sup\{|f(\omega)| : \omega \in \Omega\}$ により $B(\Omega)$ はバナッハ空間になる．

(2) $B_0(\Omega)$ を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の単関数，つまり $S_k \in \mathcal{F}$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, \ldots, n)$ により $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{S_k}$ と表される関数の全体とする．ここで 1_S は集合 S の定義関数を表す．$B_0(\Omega)$ は $B(\Omega)$ の稠密な線型部分空間である．

命題 3.2.11 E を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上のスペクトル測度とするとき，次を満たす線型写像 $\mathcal{I} : B(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が一意的に存在する：任意の $S \in \mathcal{F}$ と $f \in B(\Omega)$ に対して

(i) $\mathcal{I}(1_S) = E(S)$,

(ii) $||\mathcal{I}(f)|| \leq ||f||$.

証明 $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{S_k} \in B_0(\Omega)$ (S_k は互いに素で $\Omega = \bigcup_{k=1}^n S_k$) に対して，$\mathcal{I}(f) = \sum_{k=1}^n \alpha_k E(S_k)$ と定義する．これは f の表し方によらず定まる．実

際，別に $f=\sum_{j=1}^{n'}\alpha'_j 1_{S'_j}$ (S'_j は互いに素で $\Omega=\bigcup_{j=1}^{n'}S'_j$) と表すと，補題 3.2.9 より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k E(S_k) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n'}\alpha_k E(S_k)E(S'_j)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n'}\alpha_k E(S_k\cap S'_j)\\ &= \sum_{j=1}^{n'}\sum_{k=1}^{n}\alpha'_j E(S_k)E(S'_j)=\sum_{j=1}^{n'}\alpha'_j E(S'_j).\end{aligned}$$

$g=\sum_{j=1}^{m}\beta_j 1_{R_j}$ も f と同様な表示とすると

$$f+g=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_k+\beta_j)1_{S_k\cap R_j}$$

だから，補題 3.2.9 より

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(f+g) &= \sum_k\sum_j(\alpha_k+\beta_j)E(S_k\cap R_j)\\ &= \sum_k\sum_j\alpha_k E(S_k)E(R_j)+\sum_k\sum_j\beta_j E(S_k)E(R_j)\\ &= \mathcal{I}(f)+\mathcal{I}(g).\end{aligned}$$

また，$\mathcal{I}(\alpha f)=\alpha\mathcal{I}(f)$ は明らか．ゆえに $\mathcal{I}$ は $B_0(\Omega)$ 上で線型である．さらに

$$\begin{aligned}||\mathcal{I}(f)x||^2 &= \sum_{j,k=1}^{n}\overline{\alpha}_j\alpha_k\langle E(S_j)E(S_k)x,x\rangle=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\langle E(S_k)x,x\rangle\\ &\le ||f||^2\sum_{k=1}^{n}\langle E(S_k)x,x\rangle=||f||^2||x||^2.\end{aligned}$$

よって $||\mathcal{I}(f)||\le||f||$. このとき，$B_0(\Omega)$ の稠密性から $\mathcal{I}$ は線型写像 $\mathcal{I}:B(\Omega)\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に拡張できて (i), (ii) を満たす．さらに，$B_0(\Omega)$ 上での一意性は (i) から明らかであり，(ii) と $B_0(\Omega)$ の稠密性から $B(\Omega)$ 上での一意性がわかる． ■

定義 3.2.12 前命題の $\mathcal{I}(f)$ を $\int_\Omega fdE$ または $\int_\Omega f(\omega)dE(\omega)$ と表し，f の E による**スペクトル積分**という．

命題 3.2.13　任意の $f,g\in B(\Omega)$ に対して次が成立：

$$\int fgdE=\Big(\int fdE\Big)\Big(\int gdE\Big),\quad \int \overline{f}dE=\Big(\int fdE\Big)^*.$$

証明　$f,g\in B_0(\Omega)$ のとき，命題 3.2.11 の証明と同じく $f=\sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{S_k}$, $g=\sum_{j=1}^m \beta_j 1_{R_j}$ とすると，補題 3.2.9 より

$$\begin{aligned}\int fgdE &= \sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^m \alpha_k\beta_j E(S_k\cap R_j)=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^m \alpha_k\beta_j E(S_k)E(R_j)\\ &= \Big(\sum_{k=1}^n \alpha_k E(S_k)\Big)\Big(\sum_{j=1}^m \beta_j E(R_j)\Big)=\Big(\int fdE\Big)\Big(\int gdE\Big).\end{aligned}$$

$\overline{f}=\sum_{k=1}^n \overline{\alpha}_k 1_{S_k}$ だから

$$\int \overline{f}dE=\sum_{k=1}^n \overline{\alpha}_k E(S_k)=\Big(\int fdE\Big)^*.$$

一般の $f,g\in B(\Omega)$ のときは，$B_0(\Omega)$ の列で近似して極限移行すればよい．例えば 1 番目については，$\|f_n-f\|\to 0$, $\|g_n-g\|\to 0$ を満たす $\{f_n\},\{g_n\}\subset B_0(\Omega)$ をとると，$\|f_ng_n-fg\|\to 0$ だから，$\int f_n dE$, $\int g_n dE$, $\int f_ng_n dE$ がそれぞれ $\int fdE$, $\int gdE$, $\int fgdE$ にノルム収束する．よって

$$\int fgdE=\lim_{n\to\infty}\Big(\int f_n dE\Big)\Big(\int g_n dE\Big)=\Big(\int fdE\Big)\Big(\int gdE\Big)$$

が成立する．■

上の命題は，$f\mapsto\int fdE$ が $B(\Omega)$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への $*$-準同型であることを示す．

E が $(\Omega,\mathcal{F})$ 上のスペクトル測度のとき，任意の $x,y\in\mathcal{H}$ に対して $\langle E(\cdot)x,y\rangle:\mathcal{F}\to\mathbb{C}$ は複素数値測度となる．このとき，各 $f\in B(\Omega)$ に対して，積分 $\int_\Omega f(\omega)d\langle E(\omega)x,y\rangle$ が定義できる (付録の定義 A.2.3 (5) 参照)．

命題 3.2.14　任意の $f\in B(\Omega)$ と $x,y\in\mathcal{H}$ に対して

$$\Big\langle\Big(\int fdE\Big)x,y\Big\rangle=\int f(\omega)d\langle E(\omega)x,y\rangle.$$

証明 等式 (2.1) と補題 A.2.5 (3) より $y = x$ としてよい．$f \in B_0(\Omega)$ のときは明らか．$f \in B(\Omega)$ に対しては，$\{f_n\} \subset B_0(\Omega)$, $\|f_n - f\| \to 0$ として，f_n に対する等式の両辺の極限をとればよい． ■

注意 3.2.15 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上のスペクトル測度 E について，$\Omega_0 \in \mathcal{F}$ が $E(\Omega_0) = I$ (i.e. $E(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$) を満たすとする．このとき

$$\int_\Omega f dE = \int_{\Omega_0} f dE, \qquad f \in B(\Omega)$$

であるから，各 $f \in B(\Omega_0)$ に対して $\int f dE \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が一意に定義できて，命題 3.2.13, 3.2.14 が成立する．

Ω をコンパクト・ハウスドルフ空間，$\mathcal{B}_\Omega$ を Ω のボレル σ-集合体とする．$(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ 上のラドン測度 (i.e. 正則な有限正測度の 1 次結合で表される複素数値測度) の全体を $M(\Omega)$ で表す．$M(\Omega)$ は全変動ノルムでバナッハ空間となり，$C(\Omega)$ の双対バナッハ空間 $C(\Omega)^*$ と等距離同型になる (**リース-マルコフ-角谷の定理**)．これらの事柄についての詳細が付録の A.2 節に与えてあるので，併せて読んでもらいたい．なお，Ω が距離づけ可能ならば，$(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ 上の有限正測度はすべて正則であることに注意する (命題 A.2.9)．

スペクトル測度 $E : \mathcal{B}_\Omega \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ が**正則**とは，任意の $x, y \in \mathcal{H}$ に対して $\langle E(\cdot)x, y\rangle \in M(\Omega)$ であるときをいう．等式 (2.1) より，任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して正則度 $\langle E(\cdot)x, x\rangle$ が正則といっても同じである．

次に示すやや一般的な定理が，スペクトル分解定理の証明において最も本質的な部分である．

定理 3.2.16 Ω をコンパクト・ハウスドルフ空間とし，$\Phi : C(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $\Phi(1) = I$ である $*$-準同型写像とする．このとき，正則なスペクトル測度 $E : \mathcal{B}_\Omega \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ が一意的に存在して

$$\Phi(f) = \int f dE, \qquad f \in C(\Omega). \tag{3.7}$$

証明 まず，$f \in C(\Omega)$ に対して $\|\Phi(f)\| \le \|f\|$ (つまり $\|\Phi\| = 1$) を示す．$f \ge 0$ のとき，$g = \sqrt{f}$ とおいて $\Phi(f) = \Phi(\overline{g}g) = \Phi(g)^*\Phi(g) \ge 0$. 任意の $f \in C(\Omega)$ に対して，$\overline{f}f \le \|f\|^2 1$ だから

$$\Phi(f)^*\Phi(f) = \Phi(\overline{f}f) \le \|f\|^2\Phi(1) = \|f\|^2 I.$$

よって $\|\Phi(f)\| \leq \|f\|$ となる．

各 $x, y \in \mathcal{H}$ に対して

$$\varphi_{x,y}(f) = \langle \Phi(f)x, y \rangle, \qquad f \in C(\Omega)$$

と定義すると，$\varphi_{x,y}$ は $C(\Omega)$ 上の線型汎関数であり

$$|\varphi_{x,y}(f)| \leq \|\Phi(f)\| \, \|x\| \, \|y\| \leq \|f\| \, \|x\| \, \|y\|.$$

したがって $\varphi_{x,y} \in C(\Omega)^*$ であり $\|\varphi_{x,y}\| \leq \|x\| \, \|y\|$. ゆえに，リース-マルコフ-角谷の定理 (付録の系 A.2.8) より，$\mu_{x,y} \in M(\Omega)$ が一意的に存在して

$$\langle \Phi(f)x, y \rangle = \varphi_{x,y}(f) = \int f d\mu_{x,y}, \qquad f \in C(\Omega) \tag{3.8}$$

かつ $\|\mu_{x,y}\| = \|\varphi_{x,y}\|$. さらに，$\varphi_{x,x}$ が正値 (i.e. $f \geq 0 \Longrightarrow \varphi_{x,x}(f) \geq 0$) だから $\mu_{x,x} \geq 0$ (定理 A.2.6). ところで，$(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto \varphi_{x,y} \in C(\Omega)^*$ の双線型性より，任意の $S \in \mathcal{B}_\Omega$ について，$(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto \mu_{x,y}(S) \in \mathbb{C}$ は双線型汎関数であり

$$|\mu_{x,y}(S)| \leq \|\mu_{x,y}\| = \|\varphi_{x,y}\| \leq \|x\| \, \|y\|. \tag{3.9}$$

よって補題 2.1.4 より $E(S) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在して

$$\mu_{x,y}(S) = \langle E(S)x, y \rangle, \qquad x, y \in \mathcal{H}. \tag{3.10}$$

(3.9) と $\mu_{x,x} \geq 0$ $(x \in \mathcal{H})$ より，$0 \leq E(S) \leq I$ であり，また

$$\langle E(\Omega)x, x \rangle = \mu_{x,x}(\Omega) = \varphi_{x,x}(1) = \langle x, x \rangle$$

だから $E(\Omega) = I$. $R, S \in \mathcal{B}_\Omega$, $R \cap S = \emptyset$ のとき

$$\begin{aligned} \langle E(R \cup S)x, x \rangle &= \mu_{x,x}(R \cup S) = \mu_{x,x}(R) + \mu_{x,x}(S) \\ &= \langle (E(R) + E(S))x, x \rangle \end{aligned}$$

となるから $E(R \cup S) = E(R) + E(S)$. よって E は有限加法的である．さらに，$\{S_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}_\Omega$ を互いに素とすると，有限加法性より

$$E\left(\bigcup_{n=1}^\infty S_n\right) = \sum_{n=1}^N E(S_n) + E\left(\bigcup_{n=N+1}^\infty S_n\right)$$

だから，$0 \le E(\cdot) \le I$ に注意して

$$\begin{aligned}
&\left\|E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)x - \sum_{n=1}^{N} E(S_n)x\right\|^2 \\
&\quad = \left\|E\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} S_n\right)x\right\|^2 \le \left\|E\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} S_n\right)^{1/2} x\right\|^2 \\
&\quad = \mu_{x,x}\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} S_n\right) \to 0 \quad (N \to \infty).
\end{aligned}$$

よって $E(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(S_n)$ (強収束).

次に，$E(S)$ が射影作用素であることを示そう．任意の閉集合 $K \subset \Omega$ と任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して，$\mu = \mu_{x,x} + \mu_{E(K)x,E(K)x}$ とおく．μ の正則性より，開集合列 $U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset K$ がとれて $\mu(U_n \setminus K) \to 0$. 各 $n \in \mathbb{N}$ について，ウリゾーンの補題より，$K, \Omega \setminus U_n$ 上でそれぞれ $1, 0$ の値をとり $0 \le f_n \le 1$ である $f_n \in C(\Omega)$ が選べる．$f_n \to 1_K$ μ-a.e. だから，$v = x$ と $v = E(K)x$ について，ルベーグの有界収束定理より

$$\langle(\Phi(f_n) - E(K))v, v\rangle = \int (f_n - 1_K) d\mu_{v,v} \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{3.11}$$

ところで，$f_n \ge 1_K$ より

$$\langle \Phi(f_n)y, y\rangle = \int f_n d\mu_{y,y} \ge \mu_{y,y}(K) = \langle E(K)y, y\rangle, \qquad y \in \mathcal{H}$$

となり $\Phi(f_n) \ge E(K)$. したがって，(3.11) より $\|(\Phi(f_n) - E(K))^{1/2}v\| \to 0$. これより，$v = x$ および $v = E(K)x$ のとき，$\|\Phi(f_n)v - E(K)v\| \to 0$ が従う．$1_K \le f_n^2 \le f_n$ で $f_n^2 \to 1_K$ μ-a.e. だから，同様に $\|\Phi(f_n^2)x - E(K)x\| \to 0$. $\Phi(f_n^2) = \Phi(f_n)^2$ を使うと

$$\begin{aligned}
&\|E(K)x - E(K)^2x\| \\
&\quad \le \|E(K)x - \Phi(f_n^2)x\| + \|\Phi(f_n)(\Phi(f_n)x - E(K)x)\| \\
&\qquad + \|\Phi(f_n)E(K)x - E(K)^2x\| \\
&\quad \to 0.
\end{aligned}$$

ゆえに $E(K) = E(K)^2$ となり，$E(K)$ は射影作用素．任意の $S \in \mathcal{B}_\Omega$ に対して，$\{E(K) : K \subset S,\ K \text{ は閉集合}\}$ は射影作用素の増大ネットになる (K

について包含関係の順序を入れる)．任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して，$\mu_{x,x}$ の正則性より

$$\langle (E(S) - E(K))x, x\rangle = \mu_{x,x}(S \setminus K) \to 0$$

となり，$E(S) \geq E(K)$ に注意すれば $||E(S)x - E(K)x|| \to 0$ が従う．つまり $\{E(K)\}$ は $E(S)$ に強収束する．よって

$$E(S)^2 = \text{s-}\lim E(K)^2 = \text{s-}\lim E(K) = E(S)$$

となるから，$E(S)$ は射影作用素．以上より E は $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ 上のスペクトル測度になり，E の正則性はつくり方から明らか．さらに，任意の $f \in C(\Omega)$ と $x, y \in \mathcal{H}$ に対して，(3.8), (3.10) と命題 3.2.14 より

$$\langle \Phi(f)x, y\rangle = \int f(\omega) d\langle E(\omega)x, y\rangle = \left\langle \left(\int f dE \right) x, y \right\rangle.$$

ゆえに (3.7) が成立する．

最後に，E の一意性は (3.8) を満たす $\mu_{x,y} \in M(\Omega)$ の一意性から簡単にわかる．■

準備ができたので目標のスペクトル分解定理を示そう．

定理 3.2.17 (有界自己共役作用素のスペクトル分解)　$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が自己共役のとき，コンパクトな台をもつ $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ 上のスペクトル測度 E が一意的に存在して

$$A = \int t dE(t). \tag{3.12}$$

ただし，E の**台**とは $E(K) = I$ となる閉集合 K で最小なものをいう．

このとき $\sigma(A)$ が E の台と一致する．さらに，任意の $f \in C(\sigma(A))$ に対して $f(A) = \int f dE$, つまり E によるスペクトル積分が連続関数カルキュラスの拡張になる．

証明　定理 3.2.2 より，A の連続関数カルキュラス $\Phi(f) = f(A)$ は $C(\sigma(A))$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への等距離 $*$-準同型写像であり，$\Phi(1) = I$ を満たす．したがって定理 3.2.16 より，$(\sigma(A), \mathcal{B}_{\sigma(A)})$ 上のスペクトル測度 E が存在して

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f dE, \qquad f \in C(\sigma(A)). \tag{3.13}$$

ここで，改めて $E(S) = E(S \cap \sigma(A))$ $(S \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ と定めると，E は $E(\sigma(A)) = I$ である $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 上のスペクトル測度になる．(3.13) より，任意の $f \in C(\sigma(A))$ に対して $f(A) = \int f dE$ が成立する (注意 3.2.15)．特に $f_0(t) = t$ をとると，$f_0(A) = A$ より (3.12) が得られる．

残りは，E の一意性と $\sigma(A)$ が E の台と一致することをいえばよい．いま，$\tilde{E}$ をコンパクトな台をもつ $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 上のスペクトル測度で $A = \int t d\tilde{E}(t)$ となるものとする．

$$U_0 = \bigcup \{U : U \subset \mathbb{R} \text{ は開集合, } \tilde{E}(U) = 0\}$$

とおくと，$\mathbb{R}$ の開集合列 $\{U_n\}$ がとれて，$\tilde{E}(U_n) = 0$ かつ $U_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ (第 2 可算公理による)．このとき，互いに素な $\{S_n\} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ で $S_n \subset U_n$, $U_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ となるものがとれて $\tilde{E}(U_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{E}(S_n) = 0$. これより $K_0 = \mathbb{R} \backslash U_0$ とすれば，K_0 が $\tilde{E}$ の台であることがわかる．そこで $K_0 = \sigma(A)$ を示す．任意の $\lambda \notin K_0$ に対して，$(\lambda - t)^{-1} \in C(K_0)$ だから，注意 3.2.15 より $B = \int (\lambda - t)^{-1} d\tilde{E}(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が定まり

$$B(\lambda I - A) = \left(\int (\lambda - t)^{-1} d\tilde{E}(t)\right)\left(\int (\lambda - t) d\tilde{E}(t)\right) = \int 1 d\tilde{E} = I.$$

同じく $(\lambda I - A)B = I$. よって $\lambda \notin \sigma(A)$. 逆に $\lambda \in K_0$ (i.e. $\lambda \notin U_0$) とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\tilde{E}((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)) \neq 0$. したがって，$||x|| = 1$ となる $x \in \mathcal{H}$ がとれて $\tilde{E}((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon))x = x$. $\tilde{E}(\mathbb{R} \setminus (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon))x = 0$ だから

$$\begin{aligned} ||(\lambda I - A)x||^2 &= \left\langle \left(\int (\lambda - t) d\tilde{E}(t)\right)^* \left(\int (\lambda - t) d\tilde{E}(t)\right) x, x \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\int |\lambda - t|^2 d\tilde{E}(t)\right) x, x \right\rangle = \int |\lambda - t|^2 d\langle \tilde{E}(t)x, x\rangle \\ &\leq \varepsilon^2 \int d\langle \tilde{E}(t)x, x\rangle = \varepsilon^2. \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから，$\lambda I - A \notin \mathcal{G}$ となり $\lambda \in \sigma(A)$. これで $\tilde{E}$ (特に E) の台が $\sigma(A)$ と一致することが示せた．最後に一意性を示す．命題 3.2.13 より，すべての $f \in \mathbb{P}$ に対して $f(A) = \int_{\sigma(A)} f d\tilde{E}$ となる．さらに $\mathbb{P}$ の稠密性から，すべての $f \in C(\sigma(A))$ に対して同じ等式が成立する．(3.13) と合わせて，定理 3.2.16 における一意性から $E = \tilde{E}$ を得る． ■

定義 3.2.18　$\mathcal{H}$ 上の射影作用素の1径数族 $\{E_t : -\infty < t < \infty\}$ は

(i) $s < t \Longrightarrow E_s \leq E_t$　(単調性),

(ii) $\text{s-}\lim_{t\downarrow s} E_t = E_s,\ s \in \mathbb{R}$　(右連続性),

(iii) $\text{s-}\lim_{t\downarrow -\infty} E_t = 0,\ \text{s-}\lim_{t\uparrow\infty} E_t = I$

を満たすとき，**スペクトル族**または**単位の分解**であるという．次の命題より，これを $\mathbb{R}$ 上のスペクトル測度と呼ぶことも多い．

命題 3.2.19　E が $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 上のスペクトル測度のとき

$$E_t = E((-\infty, t]), \qquad t \in \mathbb{R} \tag{3.14}$$

と定めると，$\{E_t : -\infty < t < \infty\}$ はスペクトル族となる．逆に，$\{E_t : -\infty < t < \infty\}$ がスペクトル族のとき，(3.14) を満たす $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 上のスペクトル測度 E がただ1つ存在する．

このとき，E がコンパクトな台をもつことは，$-\infty < \alpha < \beta < \infty$ がとれて $E_\alpha = 0,\ E_\beta = I$ となることと同値である．

証明　スペクトル族 $\{E_t\}$ からスペクトル測度 E が (3.14) で一意に定まることだけを示す．残りは容易である．半開区間 $(s, t]$ 全体で生成される有限加法的な集合体を $\mathcal{B}_0$ で表す．任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して，$f_x(t) = \langle E_t x, x\rangle$ が $\mathbb{R}$ 上の右連続な単調増加関数で $f_x(-\infty) = 0,\ f_x(\infty) = ||x||^2$ であるから，$(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 上の有限正測度 ν_x で

$$\nu_x((-\infty, t]) = \langle E_t x, x\rangle, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{3.15}$$

となるものが一意に定まる．(この ν_x は f_x によるスティルチェス測度と呼ばれる.) 各 $x, y \in \mathcal{H}$ に対して，$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 上の複素数値測度 $\mu_{x,y}$ を

$$\mu_{x,y}(S) = \frac{1}{4}\{\nu_{x+y}(S) - \nu_{x-y}(S) + i\nu_{x+iy}(S) - i\nu_{x-iy}(S)\}$$

と定義する．いま，$(x, y) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H} \mapsto \mu_{x,y}(S) \in \mathbb{C}$ が双線型汎関数であるような $S \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ の全体を $\mathcal{M}$ とおく．(3.15) と (2.1) より $\mu_{x,y}((-\infty, t]) = \langle E_t x, y\rangle$ が成立するから，$\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{M}$ が従う．また，$\mathcal{M}$ が単調族 (i.e. $\{S_n\} \subset \mathcal{M},\ S_n \uparrow S$ または $S_n \downarrow S$ のとき $S \in \mathcal{M}$) であることは容易にわかる．ゆえに単調族定理より $\mathcal{M} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$．さらに，$||x|| = ||y|| = 1$ のとき

$$|\mu_{x,y}(S)| \leq \frac{1}{4}(||x+y||^2 + ||x-y||^2 + ||x+iy||^2 + ||x-iy||^2) = 2.$$

したがって，任意の $S \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ に対して，$(x,y) \mapsto \mu_{x,y}(S)$ が有界な双線型汎関数となり，補題 2.1.4 より $E(S) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在して $\mu_{x,y}(S) = \langle E(S)x, y\rangle$ $(x, y \in \mathcal{H})$. この E は (3.14) を満たし，$\mu_{x,x} = \nu_x \geq 0$ だから $0 \leq E(S) \leq I$ および $E(\mathbb{R}) = I$ が成立．したがって，定理 3.2.16 の証明と同様に E の可算加法性が示せる．また，$\{S \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : E(S)$ は射影$\}$ が単調族で $\mathcal{B}_0$ を含むから，再び単調族定理より $E(S)$ がすべての $S \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ で射影となる．ゆえに E がスペクトル測度になる．E の一意性は，(3.15) を満たす測度 ν_x の一意性から簡単に確かめられる． ■

定理 3.2.17 と命題 3.2.19 から

1° 有界な自己共役作用素，

2° コンパクトな台をもつ $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 上のスペクトル測度，

3° コンパクトな台をもつスペクトル族 $\{E_t : -\infty < t < \infty\}$

の 3 つは本質的に同じものであると結論できる．1° と 3° は

$$\langle Ax, x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} td\langle E_t x, x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} td||E_t x||^2, \qquad x \in \mathcal{H}$$

で対応している．これを (3.12) と同じく，簡単に $A = \int tdE_t$ と表す．$\sigma(A)$ および $\sigma_{\mathrm{p}}(A)$ をスペクトル族を用いて特徴づけることもできる (演習問題 3.5).

この節の残りで，ユニタリー作用素 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ のスペクトル分解定理を証明しよう． 3 角多項式

$$p(e^{it}) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikt} \ \ (0 \leq t \leq 2\pi), \qquad \alpha_k \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$$

の全体を $\mathbb{P}_1$ で表す．単位円周 $\{e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$ を $\mathbb{T}$ で表すと，ストーン-ワイエルシュトラスの定理より $\mathbb{P}_1$ は $C(\mathbb{T})$ で稠密である．U がユニタリー作用素のとき，上の p に対して

$$p(U) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k U^k$$

と定める．

補題 3.2.20 $p \in \mathbb{P}_1$ が $p(\zeta) \geq 0$ $(\zeta \in \mathbb{T})$ を満たすならば，$q \in \mathbb{P}_1$ が存在して $p = |q|^2$ $(= \overline{q}q)$.

証明　まず $p(\zeta)=\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k\zeta^k>0$ $(\zeta\in\mathbb{T})$ とする．$p(e^{it})=\overline{p(e^{it})}=\sum_{k=-n}^{n}\overline{\alpha}_{-k}e^{ikt}$ だから $\alpha_k=\overline{\alpha}_{-k}$ である．$\alpha_n\neq 0$ として，$P(\zeta)=\zeta^n p(\zeta)=\sum_{k=0}^{2n}\alpha_{k-n}\zeta^k$ とおく．$P(\zeta)$ の因数分解を

$$P(\zeta)=\alpha_n\prod_{k=1}^{2n}(\zeta-\lambda_k)$$

とする．$P(0)=\alpha_{-n}\neq 0$ で $P(\zeta)\neq 0$ $(\zeta\in\mathbb{T})$ だから，$\lambda_k\neq 0$ かつ $|\lambda_k|\neq 1$ $(1\leq k\leq 2n)$. $P(\zeta)=\zeta^{2n}\overline{P(1/\overline{\zeta})}$ に注意すると

$$P(\zeta)=\overline{\alpha}_n\prod_{k=1}^{2n}(1-\overline{\lambda}_k\zeta).$$

よって，重複度も込めて $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_{2n}\}=\{1/\overline{\lambda}_1,\ldots,1/\overline{\lambda}_{2n}\}$ であることがわかり，それゆえ $\lambda_{n+k}=1/\overline{\lambda}_k$ $(1\leq k\leq n)$ とできる．このとき

$$\begin{aligned} p(e^{it}) &= \alpha_n e^{-int}\prod_{k=1}^{n}(e^{it}-\lambda_k)\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(e^{it}-\frac{1}{\overline{\lambda}_k}\right) \\ &= c\prod_{k=1}^{n}(e^{it}-\lambda_k)\cdot\prod_{k=1}^{n}(e^{-it}-\overline{\lambda}_k)=c\Big|\prod_{k=1}^{n}(e^{it}-\lambda_k)\Big|^2. \end{aligned}$$

定数 c は正だから，$q(e^{it})=\sqrt{c}\prod_{k=1}^{n}(e^{it}-\lambda_k)$ とすればよい．

次に $p(\zeta)\geq 0$ $(\zeta\in\mathbb{T})$ とする．上の場合から，各 $l\in\mathbb{N}$ に対して，$q_l(e^{it})=\sum_{k=0}^{n}\beta_k^{(l)}e^{ikt}$ が存在して $p(e^{it})+l^{-1}=|q_l(e^{it})|^2$. $\sum_{k=0}^{n}|\beta_k^{(l)}|^2=\alpha_0+l^{-1}$ だから，部分列 $\{l_m\}\subset\{l\}$ がとれて，各 k について $\beta_k^{(l_m)}\to\beta_k$ $(m\to\infty)$ とできる．$q(e^{it})=\sum_{k=0}^{n}\beta_k e^{ikt}$ とすれば $p=|q|^2$ が成立．■

補題 3.2.21　$U\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ がユニタリーのとき，任意の $p,q\in\mathbb{P}_1$, $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して次が成立：

(i) $(p+q)(U)=p(U)+q(U)$, $(\alpha p)(U)=\alpha p(U)$,

(ii) $(pq)(U)=p(U)q(U)$, $\overline{p}(U)=p(U)^*$,

(iii) $||p(U)||\leq||p||$. ただし $||p||$ は $C(\mathbb{T})$ の元としてのノルム．

証明　(i) と (ii) は定義より簡単．任意の $p\in\mathbb{P}_1$ に対して，補題 3.2.20 より $q\in\mathbb{P}_1$ が存在して $||p||^2-\overline{p}p=\overline{q}q$. よって上の (i) と (ii) より

$$||p||^2I-p(U)^*p(U)=q(U)^*q(U)\geq 0$$

となるから $||p(U)||^2=||p(U)^*p(U)||\leq||p||^2$. ゆえに (iii) が成立．■

定理 3.2.22 (ユニタリー作用素のスペクトル分解)　$U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ がユニタリーのとき，$E_0 = 0,\ E_{2\pi} = I$ となるスペクトル族 $\{E_t : -\infty < t < \infty\}$ が一意的に存在して

$$U = \int_0^{2\pi} e^{it} dE_t. \tag{3.16}$$

このとき，E の台を $\operatorname{supp} E$ で表すと

$$\sigma(U) = \{e^{it} : t \in \operatorname{supp} E\}. \tag{3.17}$$

証明　$\Phi_0 : \mathbb{P}_1 \ (\subset C(\mathbb{T})) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $\Phi_0(p) = p(U)$ と定めると，補題 3.2.21 より Φ_0 は $*$-準同型写像で $C(\mathbb{T})$ のノルムについて有界である．$\mathbb{P}_1$ は $C(\mathbb{T})$ で稠密だから，定理 3.2.2 の証明と同様にして，Φ_0 は $*$-準同型写像 $\Phi : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に一意に連続拡張できる．ここで $\Phi(1) = I,\ \Phi(f_0) = U$ (ただし $f_0(\zeta) = \zeta$)．したがって，定理 3.2.16 より $(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}})$ 上のスペクトル測度 F が存在して

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{T}} f dF, \qquad f \in C(\mathbb{T}).$$

そこで，$\varphi : (0, 2\pi] \to \mathbb{T}$ を $\varphi(t) = e^{it}$ とおいて

$$E_t = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ F(\varphi((0,t])), & 0 < t \leq 2\pi \\ I, & t > 2\pi \end{cases}$$

と定めると，$\{E_t\}$ は $E_0 = 0,\ E_{2\pi} = I$ となるスペクトル族である．このとき，スペクトル積分に変数変換 $\zeta = \varphi(t)$ を施すと

$$U = \int_{\mathbb{T}} \zeta dF(\zeta) = \int_{(0,2\pi]} e^{it} dE_t \tag{3.18}$$

が容易に確かめられる．つまり (3.16) が示せた．逆に，スペクトル族 $\{E_t\}$ が $E_0 = 0,\ E_{2\pi} = I$ で (3.16) を満たすとする．命題 3.2.19 より $\{E_t\}$ に $(0, 2\pi]$ 上のスペクトル測度 E が対応する．$F(S) = E(\varphi^{-1}(S))$ $(S \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}})$ と定めると，(3.18) と同じく $U = \int_{\mathbb{T}} \zeta dF(\zeta)$ と表すことができる．これより $p(U) = \int_{\mathbb{T}} p(\zeta) dF(\zeta)$ $(p \in \mathbb{P}_1)$ となり，$\mathbb{P}_1$ の稠密性から，すべての $f \in C(\mathbb{T})$ に対して $\Phi(f) = \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) dF(\zeta)$ が成立．ゆえに，定理 3.2.16 における一意性から，F すなわち E の一意性が従う．

(3.17) は演習問題とする． ■

ユニタリー作用素 U を (3.16) のようにスペクトル分解して $H = \int_0^{2\pi} t dE_t$ とすると，H は自己共役作用素であり，(3.16) は $U = e^{iH}$ と表される．

この節では，有界な自己共役作用素とユニタリー作用素の場合にスペクトル分解定理を示した．しかし，正規作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対しても，$(\sigma(A), \mathcal{B}_{\sigma(A)})$ 上のスペクトル測度 E が存在して $A = \int \zeta dE(\zeta)$ と表すことができる．実際，命題 3.2.13 によれば，このようなスペクトル積分表示をもつ有界作用素は正規作用素までであることに注意する．さて，正規作用素のスペクトル分解定理の証明であるが，1 つには，$A = B + iC$ とデカルト分解して (補題 2.1.10)，B と C のスペクトル測度の直積として A のスペクトル測度を構成する方法がある．しかし，この方法は厳密に議論すると測度論的に少し面倒である．付録の定理 A.5.10 では，可換 C^*-環のゲルファンド-ナイマルクの定理を経由する方法で正規作用素のスペクトル分解を示す．

3.3　非有界作用素のスペクトル分解

ヒルベルト空間上の非有界線型作用素に関する一般的な事柄は 2.3 節で説明した．この節では，非有界の自己共役作用素のスペクトル分解とユニタリー作用素の連続 1 径数群に対するスペクトル分解 (ストーンの定理) を示す．

まず，$\mathbb{R}$ 上のスペクトル積分を一般の (有界とは限らない) ボレル関数にまで拡張しよう．$E = \{E_t : -\infty < t < \infty\}$ を $\mathcal{H}$ におけるスペクトル族，すなわち $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ 上のスペクトル測度とする (命題 3.2.19)．f を $\mathbb{R}$ 上の複素数値ボレル関数とする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & |f(t)| \le n \\ 0, & |f(t)| > n \end{cases} \tag{3.19}$$

とおくと，f_n は有界だから $T_n = \int f_n dE \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が定まる (命題 3.2.11)．このとき次が成立．

補題 3.3.1　任意の $x \in \mathcal{H}$ について次は同値：

(i) $\{T_n x\}$ がノルム収束；

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 d\|E_t x\|^2 < +\infty$.

さらに，上の条件を満たす $x \in \mathcal{H}$ の全体 $\mathcal{D}$ は $\mathcal{H}$ の稠密な線型部分空間である．

証明 $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，命題 3.2.13, 3.2.14 より

$$||T_n x||^2 = \langle T_n^* T_n x, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t)|^2 d||E_t x||^2, \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} ||T_m x - T_n x||^2 &= \langle (T_m - T_n)^* (T_m - T_n) x, x \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f_m(t) - f_n(t)|^2 d||E_t x||^2. \end{aligned}$$

これらより (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) がすぐにわかる．条件 (i) より明らかに $\mathcal{D}$ は線型部分空間．$S_n = \{t \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq n\}$ とする．$x \in E(S_n)\mathcal{H}$ のとき，$m \geq n$ に対して，$T_m E(S_n) = \int f_m 1_{S_n} dE = T_n$ だから

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_m(t)|^2 d||E_t x||^2 = ||T_m x||^2 = ||T_n x||^2.$$

よって $\int |f(t)|^2 d||E_t x||^2 = ||T_n x||^2$ となり $x \in \mathcal{D}$．したがって $E(S_n)\mathcal{H} \subset \mathcal{D}$．$S_n \uparrow \mathbb{R}$ より $E(S_n) \xrightarrow{\text{SOT}} I$ だから，$\mathcal{D}$ は $\mathcal{H}$ で稠密である． ■

命題 3.3.2 上の補題と同じく $\mathcal{D}$ をとり

$$Tx = \lim_{n \to \infty} T_n x, \qquad x \in \mathcal{D} = \operatorname{dom} T$$

と定めると，T は稠密な定義域をもつ閉作用素である．さらに

$$||Tx||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 d||E_t x||^2, \qquad x \in \operatorname{dom} T. \tag{3.21}$$

証明 f の代わりに $\overline{f}$ を考えると，T_n は $T_n^* = \int \overline{f}_n dE$ に置き換わる．したがって T と同様に

$$T' x = \lim_{n \to \infty} T_n^* x, \qquad x \in \mathcal{D} = \operatorname{dom} T'$$

が定まる．上の補題より T, T' は稠密な定義域をもつ線型作用素である．そこで $T' = T^*$ を証明しよう．任意の $x, y \in \mathcal{D}$ に対して

$$\langle Tx, y \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle T_n x, y \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x, T_n^* y \rangle = \langle x, T' y \rangle$$

だから $T' \subset T^*$ が成立．逆に $y \in \operatorname{dom} T^*$，すなわち $z \in \mathcal{H}$ が存在して $\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$ $(x \in \mathcal{D})$ とする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$S_n = \{t : |f(t)| \leq n\}$ とおくと，補題 3.3.1 の証明より $E(S_n)\mathcal{H} \subset \mathcal{D}$ で $TE(S_n) = T_n$ が成立．よって任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$\langle T_n x, y\rangle = \langle TE(S_n)x, y\rangle = \langle E(S_n)x, z\rangle = \langle x, E(S_n)z\rangle.$$

ゆえに $T_n^* y = E(S_n)z$ となり

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t)|^2 d||E_t y||^2 = ||T_n^* y||^2 \leq ||z||^2.$$

これより $y \in \mathcal{D}$ となるから，$\operatorname{dom} T^* \subset \mathcal{D} = \operatorname{dom} T'$．したがって $T' = T^*$．T と T' の立場を入れ替えると，$T = T'^* = T^{**}$ となり T は閉作用素．(3.21) は (3.20) で $n \to \infty$ とすればよい．■

定義 3.3.3　上の命題で与えた閉作用素 T を $\int f dE$ または $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dE_t$ と表し，f の E による**スペクトル積分**という．f が有界関数のとき，$\int f dE \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ で前節の定義と一致する．

命題 3.3.4　f, g は $\mathbb{R}$ 上のボレル関数とする．

(1) $(\int f dE)^* = \int \overline{f} dE$.

(2) f が実数値ならば $\int f dE$ は自己共役作用素．特に $\int t dE_t$ は自己共役．

(3) $\int f dE + \int g dE \subset \int (f+g) dE$.

(4) $(\int f dE)(\int g dE) \subset \int fg dE$.

証明　(1) は命題 3.3.2 の証明で示してある．(2) は (1) より明らか．

(3) 簡単のため $T_f = \int f dE$ などと表す．$h = f + g$ とおいて (3.19) と同様に g_n, h_n を定める．$x \in \operatorname{dom} T_f \cap \operatorname{dom} T_g$ のとき，$|h(t)|^2 \leq 2(|f(t)|^2 + |g(t)|^2)$ より $\int |h(t)|^2 d||E_t x||^2 < +\infty$．よって $x \in \operatorname{dom} T_h$．このとき

$$||(T_{f_n} + T_{g_n} - T_{h_n})x||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t) + g_n(t) - h_n(t)|^2 d||E_t x||^2.$$

$|f_n(t) + g_n(t) - h_n(t)|^2 \leq 4(|f(t)| + |g(t)|)^2$ かつ $f_n(t) + g_n(t) - h_n(t) \to 0$ だから，ルベーグの収束定理より上の積分は 0 に収束する．したがって $T_f x + T_g x = T_h x$ となり $T_f + T_g \subset T_h$.

(4) $x \in \operatorname{dom} T_g$ かつ $T_g x \in \operatorname{dom} T_f$ とする．任意の $S \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ に対して

$$\begin{aligned} \|E(S)T_g x\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \left\| \left(\int_{-\infty}^{\infty} 1_S dE \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_n dE \right) x \right\|^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_S |g_n(t)|^2 d\|E_t x\|^2 = \int_S |g(t)|^2 d\|E_t x\|^2. \end{aligned}$$

これは $|g|^2$ がラドン-ニコディム微分 $d\|E_t T_g x\|^2/d\|E_t x\|^2$ (付録の補題 A.2.1 (1)) であることを示す．よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)g(t)|^2 d\|E_t x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 d\|E_t T_g x\|^2 < +\infty$$

(補題 A.2.1 (2)) となるから $x \in \operatorname{dom} T_{fg}$. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，上の (3) と (3.21) より

$$\begin{aligned} &\|T_{f_n g_m} x - T_{f_n g} x\|^2 \\ &\quad = \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t)|^2 |g_m(t) - g(t)|^2 d\|E_t x\|^2 \to 0 \quad (m \to \infty) \end{aligned}$$

だから，$T_{f_n} T_{g_m} = T_{f_n g_m}$ (命題 3.2.13) に注意して

$$T_{f_n} T_g x = \lim_{m\to\infty} T_{f_n} T_{g_m} x = \lim_{m\to\infty} T_{f_n g_m} x = T_{f_n g} x.$$

再び (3) と (3.21) より

$$\|T_{f_n g} x - T_{fg} x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t) - f(t)|^2 |g(t)|^2 d\|E_t x\|^2 \to 0 \quad (n \to \infty)$$

だから

$$T_f T_g x = \lim_{n\to\infty} T_{f_n} T_g x = \lim_{n\to\infty} T_{f_n g} x = T_{fg} x.$$

したがって $T_f T_g \subset T_{fg}$. ■

非有界自己共役作用素のスペクトル分解定理をフォン・ノイマンの方法に基づいて証明するために，次の補題を準備する．

補題 3.3.5 T を稠密な定義域をもつ $\mathcal{H}$ 上の閉対称作用素とする．

(1) 等距離作用素 $U : \overline{\operatorname{ran}}(T + iI) \to \overline{\operatorname{ran}}(T - iI)$ が一意に存在して

$$U(T + iI)x = (T - iI)x, \qquad x \in \operatorname{dom} T. \tag{3.22}$$

(2) T が自己共役であることは，上の U が $\mathcal{H}$ 上のユニタリー作用素になることと同値である．

証明　(1) 任意の $x \in \operatorname{dom} T$ に対して，命題 2.3.9 (1) より

$$\begin{aligned} \|(T \pm iI)x\|^2 &= \|Tx\|^2 + \|x\|^2 + 2\operatorname{Im}\langle Tx, x\rangle \\ &= \|Tx\|^2 + \|x\|^2 \end{aligned}$$

だから $\|(T+iI)x\| = \|(T-iI)x\|$. よって (3.22) により線型作用素 U : $\operatorname{ran}(T+iI) \to \operatorname{ran}(T-iI)$ が定義できて，U は等距離作用素となる．このとき，U は $\overline{\operatorname{ran}}(T+iI)$ から $\overline{\operatorname{ran}}(T-iI)$ の上への等距離作用素に拡張できる．U の一意性は明らか．

(2) 定理 2.3.12 より

$$\begin{aligned} T \text{ が自己共役} &\iff \overline{\operatorname{ran}}(T \pm iI) = \mathcal{H} \\ &\iff U \text{ が } \mathcal{H} \text{ 上のユニタリー作用素．} \end{aligned}$$ ■

定義 3.3.6　稠密な定義域をもつ閉作用素 T に対して，上の補題で与えた U を T の**ケーリー変換**といい

$$U = (T - iI)(T + iI)^{-1} \quad \text{または} \quad U = \frac{T - iI}{T + iI}$$

と表す．

閉作用素 T とそのケーリー変換 U の間には密接な関係 (例えば演習問題 3.10, 3.11) が成立するが，ここでは以下で必要な次の補題を示すにとどめる．

補題 3.3.7　(1) T を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とし，T のケーリー変換を U とするとき，$\ker(I-U) = \{0\}$ かつ $\operatorname{dom} T = \operatorname{ran}(I-U)$ であり次が成立：

$$T(I-U)y = i(I+U)y, \qquad y \in \mathcal{H}. \tag{3.23}$$

(2) $\{E_t : -\infty < t < \infty\}$ がスペクトル族のとき，$T = \int t dE_t$ のケーリー変換は次で与えられる：

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-i}{t+i} dE_t. \tag{3.24}$$

証明　(1) 定理 2.3.12 より，任意の $y \in \mathcal{H}$ は $y = (T+iI)x$ $(x \in \operatorname{dom} T)$ と表される．このとき (3.22) より $Uy = (T-iI)x$. よって

$$(I+U)y = 2Tx, \qquad (I-U)y = 2ix. \tag{3.25}$$

これより，$(I-U)y=0$ ならば $x=0$ となり $y=0$. したがって $\ker(I-U)=\{0\}$. (3.25) より

$$T(I-U)y=2iTx=i(I+U)y$$

となるから，$\mathrm{dom}\,T\supset\mathrm{ran}(I-U)$ で (3.23) が成立．さらに，$\mathrm{dom}\,T\subset\mathrm{ran}(I-U)$ は，(3.25) ですべての $x\in\mathrm{dom}\,T$ がとれることからわかる．

(2) 命題 3.3.4 (2) より $T=\int t dE_t$ は自己共役である．U を (3.24) で定めると，$|(t-i)/(t+i)|=1$ だから命題 3.2.13 より U はユニタリー．$T\pm iI=\int(t\pm i)dE_t$ であるから，命題 3.3.4 (4) より

$$U(T+iI)\subset\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)(t+i)dE_t=T-iI.$$

これは U が T のケーリー変換であることを示す． ■

上の補題は，自己共役作用素 T がそのケーリー変換 U から逆に

$$T=i(I+U)(I-U)^{-1}\quad \text{または}\quad T=i\frac{I+U}{I-U}$$

のように定まることを意味する．

定理 3.3.8 (非有界自己共役作用素のスペクトル分解) T が $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素のとき，スペクトル族 $\{E_t:-\infty<t<\infty\}$ が一意的に存在して

$$T=\int_{-\infty}^{\infty}t dE_t. \tag{3.26}$$

証明 補題 3.3.5 (2) より T のケーリー変換 U は $\mathcal{H}$ 上のユニタリー作用素．よって定理 3.2.22 より，$F_0=0,\ F_{2\pi}=I$ となるスペクトル族 $\{F_t\}$ が存在して $U=\int_0^{2\pi}e^{it}dF_t$. 補題 3.3.7 (1) より $\ker(I-U)=\{0\}$ だから，$F((0,2\pi))=I$ となることに注意する．t が $-\infty$ から ∞ まで動くとき，$(t-i)/(t+i)$ は単位円周上を 1 から正の向きに 1 周する．したがって，狭義単調増加の連続関数 $\theta:(-\infty,\infty)\to(0,2\pi)$ が

$$\frac{t-i}{t+i}=e^{i\theta(t)},\quad \theta(-\infty)=0,\quad \theta(\infty)=2\pi$$

を満たすようにとれる．そこで $E_t=F_{\theta(t)}$ $(-\infty<t<\infty)$ と定めると，$\{E_t\}$ はスペクトル族になる．命題 3.3.4 (2) より $\tilde{T}=\int t dE_t$ は自己共役で

あり，補題 3.3.7 (2) より $\tilde{T}$ のケーリー変換 $\tilde{U}$ は

$$\tilde{U} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-i}{t+i} dE_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta(t)} dF_{\theta(t)} = \int_{(0,2\pi)} e^{it} dF_t = U.$$

ゆえに補題 3.3.7 (1) より $T = \tilde{T} = \int t dE_t$ となり，(3.26) が得られた.

一意性を示すために，$\{E_t\}$ を (3.26) を満たすスペクトル族とする．補題 3.3.7 (2) より

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-i}{t+i} dE_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta(t)} dE_t = \int_{(0,2\pi)} e^{it} dE_{\theta^{-1}(t)}.$$

定理 3.2.22 における一意性から $E_{\theta^{-1}(t)} = F_t$ $(0 < t < 2\pi)$, i.e. $E_t = F_{\theta(t)}$ $(-\infty < t < \infty)$ が得られる．つまり $\{E_t\}$ は一意である．■

この節の 2 番目の主題であるストーンの定理にとりかかる．

定義 3.3.9　(1) $\mathcal{H}$ 上のユニタリー作用素の族 $\{U_t : -\infty < t < \infty\}$ が $U_0 = I$ かつ $U_s U_t = U_{s+t}$ $(s, t \in \mathbb{R})$ を満たすとき，$\{U_t\}$ を **1 径数ユニタリー群**または $\mathbb{R}$ の**ユニタリー表現**という．このとき $U_t^* = U_{-t}$.

(2)　1 径数ユニタリー群 $\{U_t\}$ が**連続**とは $U_t \xrightarrow{\text{WOT}} I$ $(t \to 0)$ のときをいう．このとき $U_t \xrightarrow{\text{SOT}} U_s$ $(t \to s)$. 実際，任意の $x \in \mathcal{H}$, $s \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \|U_{s+t}x - U_s x\|^2 &= \|U_s(U_t x - x)\|^2 = \|U_t x - x\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \langle U_t x, x\rangle - \langle x, U_t x\rangle + \|x\|^2 \\ &\to 0 \quad (t \to 0). \end{aligned}$$

なお，演習問題 1.14(2) 参照．

(3)　連続な 1 径数ユニタリー群 $\{U_t\}$ に対して

$$\operatorname{dom} T = \left\{ x \in \mathcal{H} : \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U_t - I)x \,(\text{ノルム収束}) \text{が存在} \right\}$$

として

$$Tx = \lim_{t\to 0} \frac{1}{it}(U_t - I)x, \qquad x \in \operatorname{dom} T$$

と定める．明らかに T は線型作用素であるが，これを $\{U_t\}$ の **(無限小) 生成作用素**という．

補題 3.3.10　$\{U_t\}$ を $\mathcal{H}$ 上の連続な 1 径数ユニタリー群とし，T をその生成作用素とする．

(1) $\mathrm{dom}\, T$ は $\mathcal{H}$ で稠密．

(2) $U_t T \subset T U_t$ $(t \in \mathbb{R})$．つまり $x \in \mathrm{dom}\, T$ ならば $U_t x \in \mathrm{dom}\, T$ で $U_t T x = T U_t x$.

(3) 任意の $x \in \mathrm{dom}\, T$ に対して

$$\int_0^t U_s T x ds = \frac{1}{i}(U_t - I)x, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

ただし，$t \to U_t T x$ がノルム連続だから，左辺の積分は通常のリーマン積分の意味で定義できる．

(4) T は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素．

証明　(1) 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して，$x_s = s^{-1} \int_0^s U_t x dt$ $(s > 0)$ と定めると

$$\begin{aligned} \|x_s - x\| &= \left\| \frac{1}{s} \int_0^s (U_t x - x) dt \right\| \\ &\leq \frac{1}{s} \int_0^s \|U_t x - x\| dt \to 0 \quad (s \to 0). \end{aligned}$$

したがって，$x_s \in \mathrm{dom}\, T$ $(s > 0)$ を示せば十分であるが

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}(U_r - I)x_s &= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{s} \int_0^s U_{r+t} x dt - \frac{1}{s} \int_0^s U_t x dt \right) \\ &= \frac{1}{rs}\left(\int_r^{r+s} U_t x dt - \int_0^s U_t x dt \right) \\ &= \frac{1}{s}\left(\frac{1}{r} \int_s^{r+s} U_t x dt - \frac{1}{r} \int_0^r U_t x dt \right) \end{aligned}$$

だから

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r}(U_r - I)x_s = \frac{1}{s}(U_s x - x)$$

となり $x_s \in \mathrm{dom}\, T$.

(2) $x \in \mathrm{dom}\, T$ のとき

$$\frac{1}{s}(U_s - I)U_t x = U_t \left\{ \frac{1}{s}(U_s - I)x \right\} \to i U_t T x \quad (s \to 0).$$

よって結論を得る．

(3) $x \in \operatorname{dom} T$ のとき

$$\frac{d}{ds}U_s x = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(U_{s+t} - U_s)x = iU_s Tx.$$

したがって

$$i\int_0^t U_s Tx ds = [U_s x]_0^t = (U_t - I)x.$$

(4) $x, y \in \operatorname{dom} T$ のとき

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle &= \lim_{t\to 0}\left\langle \frac{1}{it}(U_t - I)x, y\right\rangle \\ &= \lim_{t\to 0}\left\langle x, -\frac{1}{it}(U_{-t} - I)y\right\rangle = \langle x, Ty\rangle.\end{aligned}$$

よって T は対称作用素．いま $y \in \operatorname{dom} T^*$, すなわち $z \in \mathcal{H}$ が存在して $\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$ $(x \in \operatorname{dom} T)$ とする．$s > 0$ に対して，$y_s = s^{-1}\int_0^s U_t y dt$, $z_s = s^{-1}\int_0^s U_t z dt$ とおくと，$x \in \operatorname{dom} T$ のとき

$$\begin{aligned}\langle Tx, y_s\rangle &= \frac{1}{s}\int_0^s \langle Tx, U_t y\rangle dt = \frac{1}{s}\int_0^s \langle U_{-t}Tx, y\rangle dt \\ &= \frac{1}{s}\int_0^s \langle TU_{-t}x, y\rangle dt = \frac{1}{s}\int_0^s \langle U_{-t}x, z\rangle dt = \langle x, z_s\rangle.\end{aligned}$$

上で (2) を使った．(1) の証明より $y_s \in \operatorname{dom} T$ で，T が対称だから $z_s = Ty_s$. よって (3) より

$$(U_r - I)y_s = i\int_0^r U_t Ty_s dt = i\int_0^r U_t z_s dt.$$

ここで $s \to 0$ とすると，$||y_s - y||, ||z_s - z|| \to 0$ だから，$(U_r - I)y = i\int_0^r U_t z dt$ が成立．これより

$$\frac{1}{r}(U_r - I)y = \frac{i}{r}\int_0^r U_t z dt \to iz \quad (r \to 0)$$

となり $y \in \operatorname{dom} T$. ゆえに $\operatorname{dom} T = \operatorname{dom} T^*$ が示せたから，T は自己共役である．■

補題 3.3.11　$\{E_\lambda : -\infty < \lambda < \infty\}$ をスペクトル族として

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dE_\lambda, \qquad -\infty < t < \infty$$

と定めると，$\{U_t\}$ は連続な 1 径数ユニタリー群であり，その生成作用素は $T = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t$.

証明 $\{U_t\}$ が 1 径数ユニタリー群であることは命題 3.2.13 より明らか．連続性を示す．任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して，命題 3.2.14 とルベーグの収束定理より

$$\langle (U_t - I)x, x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{it\lambda} - 1) d\|E_\lambda x\|^2 \to 0 \quad (t \to 0).$$

ゆえに，(2.1) に注意して $\{U_t\}$ の連続性がいえる．次に，$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$ とし，$\{U_t\}$ の生成作用素を T' とする．$x \in \operatorname{dom} T$, i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d\|E_\lambda x\|^2 < +\infty$ のとき

$$\frac{1}{t}(U_t - I) - iT = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{e^{it\lambda} - 1}{t} - i\lambda\Big) dE_\lambda$$

だから，(3.21) より

$$\Big\|\frac{1}{t}(U_t - I)x - iTx\Big\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Big|\frac{e^{it\lambda} - 1}{t} - i\lambda\Big|^2 d\|E_\lambda x\|^2.$$

ここで，$|e^{is} - 1| \le |s|$ $(s \in \mathbb{R})$ に注意すると

$$\Big|\frac{e^{it\lambda} - 1}{t} - i\lambda\Big| \le 2|\lambda|, \qquad \lambda, t \in \mathbb{R},\ t \ne 0$$

かつ $t^{-1}(e^{it\lambda} - 1) - i\lambda \to 0$ $(t \to 0)$. よってルベーグの収束定理より

$$\lim_{t \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \Big|\frac{e^{it\lambda} - 1}{t} - i\lambda\Big|^2 d\|E_\lambda x\|^2 = 0$$

となるから，$x \in \operatorname{dom} T'$ で $Tx = T'x$. したがって $T \subset T'$. 命題 3.3.4 (2) と補題 3.3.10 (4) より T, T' がともに自己共役だから，$T = T^* \supset T'^* = T'$ も成立して $T = T'$. ■

定理 3.3.12 (ストーンの定理) $\{U_t : -\infty < t < \infty\}$ が $\mathcal{H}$ 上の連続な 1 径数ユニタリー群のとき，スペクトル族 $\{E_\lambda : -\infty < \lambda < \infty\}$ が一意的に存在して

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dE_\lambda, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{3.27}$$

証明 補題 3.3.10 (4) より $\{U_t\}$ の生成作用素 T は自己共役である．よって定理 3.3.8 より，スペクトル族 $\{E_\lambda\}$ が存在して $T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$. そこで $V_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dE_\lambda$ $(t \in \mathbb{R})$ と定めると，補題 3.3.11 より $\{V_t\}$ は連続な 1 径数ユニタリー群であり，その生成作用素は T と一致する．任意の $t \in \mathbb{R}$ に

対して，補題 3.3.10 (2) より $U_tTU_t^* \subset T$ であり，この両辺が自己共役だから $U_tTU_t^* = T$ が成立．したがって

$$T = U_tTU_t^* = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(U_tE_\lambda U_t^*)$$

(演習問題 3.13) となるから，定理 3.3.8 より $U_tE_\lambda U_t^* = E_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. これより

$$U_tV_sU_t^* = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} d(U_tE_\lambda U_t^*) = V_s,$$

i.e. $U_tV_s = V_sU_t$ $(s, t \in \mathbb{R})$. ゆえに，$W_t = V_tU_{-t}$ とおくと，$\{W_t\}$ は 1 径数ユニタリー群となる．$\{W_t\}$ の連続性も容易に確かめられる．いま S を $\{W_t\}$ の生成作用素とする．$x \in \operatorname{dom} T$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(W_t - I)x &= -V_t\left\{\frac{1}{-t}(U_{-t} - I)x\right\} + \frac{1}{t}(V_t - I)x \\ &\to -Tx + Tx = 0 \quad (t \to 0). \end{aligned}$$

よって $x \in \operatorname{dom} S$ で $Sx = 0$ である．このとき，補題 3.3.10 (3) より

$$\frac{1}{i}(W_t - I)x = \int_0^t W_sSxds = 0$$

となり $W_tx = x$ $(t \in \mathbb{R})$. $\operatorname{dom} T$ が $\mathcal{H}$ で稠密だから $W_t = I$, i.e. $U_t = V_t$ $(t \in \mathbb{R})$. これで (3.27) が得られた．また $\{E_\lambda\}$ の一意性は，補題 3.3.11 と定理 3.3.8 における一意性からすぐにわかる．■

上の定理を言い換えると，連続な 1 係数ユニタリー群 $\{U_t\}$ はその生成作用素 T により $U_t = e^{itT}$ $(t \in \mathbb{R})$ と表すことができる．

最後に，ストーンの定理の一般化について証明なしで簡単に触れておこう．G を局所コンパクト・アーベル群とする．$\mathbb{T} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$ に値をとる G 上の連続関数 γ が乗法的，すなわち $\gamma(g_1g_2) = \gamma(g_1)\gamma(g_2)$ $(g_1, g_2 \in G)$ のとき，γ を G の指標という．G の指標全体 $\widehat{G}$ は演算 $(\gamma_1\gamma_2)(g) = \gamma_1(g)\gamma_2(g)$ $(g \in G)$ によりアーベル群をなす．$\langle g, \gamma\rangle = \gamma(g)$ $(g \in G, \gamma \in \widehat{G})$ と書く．$\widehat{G}$ に G の各コンパクト集合上での一様収束の位相を入れると，$\widehat{G}$ は再び局所コンパクト・アーベル群になる．この $\widehat{G}$ を G の双対群という．有名なポントリャーギンの双対定理は，$\widehat{G}$ の双対群が自然な対応で G と位相群として同型になることを主張する．なお，G がコンパクト群であることは $\widehat{G}$ が離

散群であることと同値である．例えば，$\langle n, e^{it}\rangle = e^{int}$ $(n \in \mathbb{Z},\ t \in \mathbb{T})$ により $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$, $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$ であり，また $\langle t, \lambda\rangle = e^{it\lambda}$ $(t, \lambda \in \mathbb{R})$ により $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ である．$\mathcal{H}$ 上のユニタリー作用素の族 $\{U_g : g \in G\}$ が $U_e = I$ (e は G の単位元) かつ $U_g U_h = U_{gh}$ $(g, h \in G)$ を満たすとき，$\{U_g\}$ を G の $\mathcal{H}$ 上の**ユニタリー表現**という．ストーンの定理は，ナイマルク，アンブローズ，ゴッドメントらによって次の定理のように一般化された．ストーンとこれらの頭文字をとって SNAG 定理と呼ばれたりする．これの証明には，G 上の連続な正定値 (正の定符号) 関数に対するボホナー型の表現定理が用いられる．特に $G = \mathbb{Z}$, $G = \mathbb{R}$ の場合が，それぞれ定理 3.2.22, 3.3.12 に対応している．

定理 3.3.13 (SNAG 定理)　G を局所コンパクト・アーベル群とし，$\widehat{G}$ をその双対群とする．$\{U_g : g \in G\}$ が G の $\mathcal{H}$ 上の連続なユニタリー表現のとき，$(\widehat{G}, \mathcal{B}_{\widehat{G}})$ 上のスペクトル測度 E が一意的に存在して

$$U_g = \int_{\widehat{G}} \langle g, \gamma\rangle dE(\gamma), \qquad g \in G.$$

演習問題 3

1. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ のノルム $\|A\|$, スペクトル半径 $r(A)$, 数域半径 $w(A)$ について，次のことを示せ．
(1) $r(A) \le w(A)$.
(2) 次の 3 条件は同値である：(i) $r(A) = \|A\|$; (ii) $w(A) = \|A\|$; (iii) $\|A^n\| = \|A\|^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

2. $\{A_n\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が $\|A_n - A\| \to 0$ を満たすとき，$[0, \infty)$ 上の任意の連続関数 f に対して $\|f(A_n^* A_n) - f(A^* A)\| \to 0$ を示せ．(特に $\|\,|A_n| - |A|\,\| \to 0$.)

3. 定理 3.2.7 (2) を証明せよ．(ヒント：$f \in \mathcal{A}(\sigma(A))$, $\lambda \in \sigma(A)$ に対して，$f(\zeta) - f(\lambda) = (\zeta - \lambda)g(\zeta)$ となる $g \in \mathcal{A}(\sigma(A))$ がとれる.)

4. 自己共役な $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ のスペクトル分解を $A = \int t dE(t)$ とする．$B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が $AB = BA$ ならば，任意の $S \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ に対して $E(S)B = BE(S)$ であることを証明せよ．

5. 自己共役な $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対応するスペクトル族を $\{E_t : -\infty < t < \infty\}$ とする．このとき，$\lambda \in \mathbb{R}$ について次を示せ．

(1) $\lambda \in \sigma(A) \iff$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $E_{\lambda+\varepsilon} - E_{\lambda-\varepsilon} \neq 0$.

(2) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A) \iff E_\lambda - E_{\lambda-0} \neq 0$. ただし $E_{\lambda-0} = \text{s-}\lim_{t\uparrow\lambda} E_t$.

6. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を σ-有限な測度空間とし $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ とする．有界な可測関数 $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ に対して，**掛算作用素** M_ϕ を

$$M_\phi f = \phi f, \qquad f \in L^2(\Omega)$$

と定める．このとき次を示せ．

(1) $M_\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ であり，$||M_\phi||$ は ϕ の本質的 sup-ノルム (演習問題 1.2) に等しい．つまり

$$||M_\phi|| = \inf\{\alpha \geq 0 : |\phi(\omega)| \leq \alpha \text{ a.e.}\}.$$

(2) $M_\phi^* = M_{\overline{\phi}}$. 特に ϕ が実数値ならば M_ϕ は自己共役.

(3) $\sigma(M_\phi)$ は ϕ の本質的値域に等しい．つまり

$$\sigma(M_\phi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mu(\phi^{-1}(D_\varepsilon(\lambda))) > 0 \ (\varepsilon > 0)\}.$$

ただし $D_\varepsilon(\lambda) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - \lambda| < \varepsilon\}$.

(4) さらに，ϕ を実数値として M_ϕ のスペクトル分解を $M_\phi = \int t dE(t)$ とするとき，スペクトル射影 $E(S)$ $(S \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ を具体的に求めよ．

7. 定理 3.2.22 の (3.17) を証明せよ．

8. $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ をユニタリーとする．$U = \int_0^{2\pi} e^{it} dE_t$ を定理 3.2.22 で与えたスペクトル分解として，U の連続関数カルキュラスを

$$f(U) = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dE_t, \qquad f \in C(\mathbb{T})$$

と定める (つまり定理 3.2.22 の証明の Φ により $f(U) = \Phi(f)$)．このとき，任意の $f \in C(\mathbb{T})$ に対して $||f(U)|| = ||f||_{\sigma(U)}$ を示せ．ただし $||f||_{\sigma(U)}$ は $C(\sigma(U))$ の元としてのノルム．

9. 命題 3.3.4 の (3), (4) は次のように改良されることを示せ．ただし $\overline{}$ は閉包を意味する．

(3′) $\overline{\int f dE + \int g dE} = \int (f+g) dE$.

(4′) $\overline{(\int f dE)(\int g dE)} = \int f g dE$.

10. T, S を稠密な定義域をもつ $\mathcal{H}$ 上の閉作用素とする．T, S のケーリー変換をそれぞれ U, V とするとき，$T \subset S \iff U \subset V$ を示せ．

11. T を稠密な定義域をもつ $\mathcal{H}$ 上の閉作用素とし，そのケーリー変換を U とする．このとき，$\mathrm{dom}\, U = \overline{\mathrm{ran}}(T + iI)$, $\mathrm{ran}\, U = \overline{\mathrm{ran}}(T - iI)$ であるが，$(\mathrm{dom}\, U)^\perp = \ker(T^* - iI)$ と $(\mathrm{ran}\, U)^\perp = \ker(T^* + iI)$ の次元 (有限または無限) の対を T の**不足指数**という．補題 3.3.5 (2) は，T が自己共役 $\iff$ T の不足指数が $(0, 0)$ を意味する．そこで，次が同値であることを証明せよ：

(i) T が自己共役拡張をもつ (すなわち $T \subset S$ となる $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 S が存在する)；

(ii) T の 2 つの不足指数が一致する．

12. 例 2.3.14 で定義した作用素 D_0 について，$\overline{D_0}$ の不足指数が $(1, 1)$ であることを示せ．(D_0 の自己共役拡張は演習問題 2.14 で具体的に与えた.)

13. $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 T のスペクトル分解を $T = \int t dE_t$ とし，$U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ をユニタリーとする．このとき次を示せ．

(1) UTU^* は自己共役．

(2) $\{UE_tU^* : -\infty < t < \infty\}$ はスペクトル族．

(3) $UTU^* = \int_{-\infty}^{\infty} t d(UE_tU^*)$.

14. $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 T のスペクトル分解を $T = \int t dE_t$ とするとき，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して次が同値であることを示せ：

(i) $AT \subset TA$ (このとき A は T と可換という)；

(ii) すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して $AE_t = E_tA$.

15. $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 T のスペクトル分解を $T = \int t dE_t$ とするとき，以下のことを証明せよ．

(1) $\ker T = \mathrm{ran}(E_0 - E_{-0})$ $(= \mathrm{ran}\, E(\{0\}))$.

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $T^n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n dE_t$. (よって T^n は自己共役.)

(3) T が正定値 $\iff$ $E_t = 0$ $(t < 0)$. (よって $T = \int_0^\infty t dE_t$ と書ける.)

(4) T が正定値のとき，$S^2 = T$ となる $\mathcal{H}$ 上の正定値の自己共役作用素 S が一意的に存在する．また，この S は $S = \int_0^\infty \sqrt{t} dE_t$ で与えられる．(S を T の**平方根**といい，$T^{1/2}$ または $\sqrt{T}$ で表す.)

16. T を稠密な定義域をもつ $\mathcal{H}$ 上の閉作用素とする．定理 2.3.11 より T^*T が正定値の自己共役作用素である．したがって，上の問 (4) より T の**絶対値**を $|T| = (T^*T)^{1/2}$ と定義できる．このとき，$T = W|T|$ かつ $\ker W = \ker T$ となる部分等距離作用素 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が一意的に存在することを証明せよ (閉作用素に対する**極分解定理**)．さらに，定理 2.3.11 で与えた一連の等式が A を T に置き換えて成立することを示せ．

17. $t \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して $(U_t f)(s) = f(s+t)$ と定めると，$\{U_t\}$ が $L^2(\mathbb{R})$ 上の連続な 1 径数ユニタリー群であることを示せ．さらに，例 2.3.15 の $P = \overline{P_0}$ が $\{U_t\}$ の生成作用素であることを示せ．

第 4 章

ヒルベルト空間上のコンパクト作用素

第 2, 3 章で，ヒルベルト空間上の線型作用素に関して，基本事項から始めてスペクトル分解までの説明を終えた．以下の章で，ヒルベルト空間上の有界作用素の議論をさらに発展させる．この章では，有界作用素の重要なクラスであるコンパクト作用素について解説する．コンパクト作用素は有限次元の行列を位相的な意味で直接に一般化したものである．実際，コンパクト作用素のクラス $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ は有限階作用素の全体のノルム閉包と一致する．4.1 節で，コンパクト作用素のいくつかの特徴づけを与えた後，コンパクト作用素に関する基本定理であるフレドホルムの択一定理を証明する．さらに，コンパクト作用素のスペクトルについて調べ，行列の場合と同様な固有値展開定理を与える．$\mathcal{C}(\mathcal{H})$ に含まれるトレース・クラス $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ やヒルベルト-シュミット・クラス $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ などは重要である．4.2 節で，これらをシャッテン・クラス $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ $(1 \le p < \infty)$ として統一的に扱う．また，L^2-空間上のヒルベルト-シュミット作用素と積分作用素との関係についても触れる．

4.1　コンパクト作用素

コンパクト作用素の名称は次の定義に基づくが，古くは完全連続作用素とも呼ばれた．

定義 4.1.1　$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が**コンパクト作用素**とは，$\{Ax : x \in \mathcal{H}, \|x\| \le 1\}$ がノルム位相で相対コンパクトのときをいう．$\mathcal{H}$ 上のコンパクト作用素の全体を $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ で表す．また，$\mathcal{H}$ 上の有限階作用素の全体を $\mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ で表す．

命題 4.1.2　$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について次は同値：

(i) $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$;

(ii) $x_n \xrightarrow{\mathrm{w}} x$ (定義 1.3.9) のとき $\|Ax_n - Ax\| \to 0$;

(iii) $\{x_n\}$ が ONS のとき $\|Ax_n\| \to 0$;

(iv) $\{A_n\} \subset \mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ が存在して $\|A_n - A\| \to 0$.

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii). $x_n \xrightarrow{\mathrm{w}} x$ とすると

$$\langle Ax_n - Ax, y\rangle = \langle x_n - x, A^*y\rangle \to 0, \qquad y \in \mathcal{H}$$

だから $Ax_n \xrightarrow{\mathrm{w}} Ax$. 任意の $y \in \mathcal{H}$ に対して $\{\langle x_n, y\rangle\}$ が有界だから，1.3 節の最後に述べた 1° より $\{x_n\}$ は有界．よって A のコンパクト性より $\{Ax_n\}$ は相対コンパクト．しかし，$Ax_n \xrightarrow{\mathrm{w}} Ax$ だから，$\{Ax_n\}$ の集積点は Ax に限られる．したがって $\|Ax_n - Ax\| \to 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$, $\|x_n\| \leq 1$ とすると，部分列 $\{x_{n_k}\}$ と $x \in \mathcal{H}$ が存在して $x_{n_k} \xrightarrow{\mathrm{w}} x$ (演習問題 1.15)．このとき (ii) より $\|Ax_{n_k} - Ax\| \to 0$. ゆえに $\{Ax : \|x\| \leq 1\}$ が相対コンパクト．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). $\{x_n\}$ が ONS のとき，$x_n \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$ だから明らか．

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathcal{M} = (\ker A)^\perp$ の CONS とする．各 $m \in \mathbb{N}$ に対して，$\{\lambda \in \Lambda : \|Ae_\lambda\| \geq 1/m\}$ が無限集合とすると (iii) と矛盾する．よって $\Lambda = \bigcup_m \{\lambda \in \Lambda : \|Ae_\lambda\| \geq 1/m\}$ は高々可算集合である．そこで，$\mathcal{M}$ の CONS を改めて $\{e_n\}$ として

$$\alpha_n = \sup\{\|Ax\| : x \in \mathcal{M} \cap \{e_1, \ldots, e_n\}^\perp, \|x\| \leq 1\}$$

とおくと，$\{\alpha_n\}$ は単調減少列となる．$\alpha_n \downarrow \alpha$ とし $\alpha > 0$ と仮定すると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\|Ax\| > \alpha/2$ となる $x \in \mathcal{M} \cap \{e_1, \ldots, e_n\}^\perp$, $\|x\| = 1$ が存在する．$x \in \mathcal{M} \cap \{e_1, \ldots, e_n\}^\perp$ ならば $x = \sum_{k=n+1}^\infty \langle x, e_k\rangle e_k$ だから，上の x として，ある $m > n$ で $x \in \mathrm{span}\{e_{n+1}, \ldots, e_m\}$ にとれる (span は線型包を表す)．したがって，$\|x_k\| = 1$ である $x_1, x_2, \ldots$ を

$$\begin{aligned} x_1 &\in \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_{n_1}\}, & \|Ax_1\| > \alpha/2, \\ x_2 &\in \mathrm{span}\{e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_2}\}, & \|Ax_2\| > \alpha/2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

のように選べる．このとき，$\{x_k\}$ は ONS で $\|Ax_k\| > \alpha/2$ となり (iii) に反する．よって $\alpha = 0$ がいえる．$x \in \mathcal{H}$, $\|x\| \le 1$ のとき，$x = y + z$ ($y \in \mathcal{M}$, $z \in \mathcal{M}^{\perp}$) と分解すると，$Az = 0$ かつ $\langle z, e_k \rangle = 0$ だから

$$\left\|Ax - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle Ae_k\right\| = \left\|A\left(y - \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k \rangle e_k\right)\right\| \le \alpha_n.$$

よって $\|A - \sum_{k=1}^{n} \langle \cdot\,, e_k \rangle Ae_k\| \le \alpha_n \to 0$ となり，$\sum_{k=1}^{n} \langle \cdot\,, x_k \rangle Ax_k$ が有限階だから (iv) が成立．

(iv) $\Longrightarrow$ (ii). (ii) は $x = 0$ として十分．$x_k \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$ のとき，(iv) の $\{A_n\}$ を用いて

$$\|Ax_k\| \le \|(A - A_n)x_k\| + \|A_n x_k\| \le \|A - A_n\| \Big(\sup_k \|x_k\|\Big) + \|A_n x_k\|.$$

ゆえに，有限階の B に対して $\|Bx_k\| \to 0$ を示せばよい．これは $B = \sum_{j=1}^{N} \langle \cdot\,, y_j \rangle z_j$ と表して

$$\|Bx_k\| \le \sum_{j=1}^{N} |\langle x_k, y_j \rangle| \, \|z_j\| \to 0$$

より成立． ■

注意 4.1.3 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とし，ネット $\{x_\alpha\} \subset \mathcal{H}$ が $x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{w}} x \in \mathcal{H}$ のとき，上の (i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明と同様に $Ax_\alpha \xrightarrow{\mathrm{w}} Ax$. よって A は弱位相に関して連続．1.3 節の最後に述べたように $\{x \in \mathcal{H} : \|x\| \le 1\}$ が弱コンパクトだから，$\{Ax : \|x\| \le 1\}$ も弱コンパクト (よって弱閉)．したがって $\{Ax : \|x\| \le 1\}$ はノルム位相で閉集合となるから，定義 4.1.1 で相対コンパクトを単にコンパクトとしても同じである．

命題 4.1.4 $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の両側閉イデアルである．すなわち，$\mathcal{C}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の閉部分空間であり，$A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ならば $AB, BA \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$.

証明 $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする．$x_n \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$ のとき，$Bx_n \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$ だから，命題 4.1.2 より $\|ABx_n\| \to 0$. また，$\|Ax_n\| \to 0$ だから $\|BAx_n\| \to 0$. よって命題 4.1.2 より $AB, BA \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ が $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の部分空間であることは容易．命題 4.1.2 の (iv) は $\mathcal{C}(\mathcal{H}) = \overline{\mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})}$ (ノルム閉包) を意味するから，$\mathcal{C}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ でノルム閉である． ■

命題 4.1.4 と定理 2.2.6 から次がいえる．

系 4.1.5　$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について，$A, A^*, |A|, |A^*|$ のいずれかがコンパクトならば，すべてがコンパクトである．

次の定理 (**フレドホルムの交代定理**ともいう) は，コンパクト作用素に関して最も基本的なものである．

定理 4.1.6 (フレドホルムの択一定理)　$A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ ならば，次のいずれかが起こる：

(a) $I - A$ が可逆；

(b) $\ker(I - A) \neq \{0\}$.

つまり，$\ker(I-A) = \{0\}$ ならば $I-A$ は可逆である．さらに，$\mathrm{ran}(I-A)$ は閉部分空間である．

証明　まず，$A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ のとき，$B = I - A$ について次の 1°–3° を証明しよう．

1°　$\mathrm{ran}\, B = \mathcal{H} \Longrightarrow \ker B = \{0\}$.

2°　$\alpha > 0$ が存在して，任意の $x \in (\ker B)^{\perp}$ に対して $||Bx|| \geq \alpha ||x||$.

3°　$\mathrm{ran}\, B$ は閉．

1° の証明．$\mathrm{ran}\, B = \mathcal{H}$ とし，$\mathcal{K}_n = \ker B^n$ $(n \in \mathbb{N})$ とおけば $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset \cdots$. $\mathcal{K}_1 = \ker B \neq \{0\}$ と仮定し $x_1 \in \mathcal{K}_1 \setminus \{0\}$ とすると，$\mathrm{ran}\, B = \mathcal{H}$ だから $x_2 \in \mathcal{H}$ が存在して $Bx_2 = x_1$. よって $B^2 x_2 = Bx_1 = 0$ より $x_2 \in \mathcal{K}_2 \setminus \mathcal{K}_1$. $x_3 \in \mathcal{H}$ が存在して $Bx_3 = x_2$. よって $B^3 x_3 = B^2 x_2 = 0$ より $x_3 \in \mathcal{K}_3 \setminus \mathcal{K}_2$. この議論をくり返すと，$\mathcal{K}_1 \subsetneqq \mathcal{K}_2 \subsetneqq \mathcal{K}_3 \subsetneqq \cdots$. これより，$||y_n|| = 1$ である $\{y_n\}$ が存在して $y_1 \in \mathcal{K}_1$, $y_n \in \mathcal{K}_n \cap \mathcal{K}_{n-1}^{\perp}$ $(n \geq 2)$. $\{y_n\}$ が ONS だから，命題 4.1.2 より $||Ay_n|| \to 0$. 他方，$n \geq 2$ のとき，$y_n \in \mathcal{K}_n$ より $By_n \in \mathcal{K}_{n-1}$ となるので $y_n \perp By_n$. したがって

$$||Ay_n||^2 = ||y_n - By_n||^2 = ||y_n||^2 + ||By_n||^2 \geq ||y_n||^2 = 1$$

となり矛盾．ゆえに $\ker B = \{0\}$.

2° の証明．2° を否定すると，$||x_n|| = 1$ である $\{x_n\} \subset (\ker B)^{\perp}$ がとれて $||Bx_n|| \to 0$. $\{Ax_n\}$ はノルム収束する部分列をもつから，最初から $\{Ax_n\}$ が $y \in \mathcal{H}$ にノルム収束するとしてよい．このとき，$x_n = Ax_n + Bx_n$ より $||x_n - y|| \to 0$ となり，$y \in (\ker B)^{\perp}$, $||y|| = 1$. ところが，$||Bx_n - By|| \to 0$ より $By = 0$ となり，$y \in \ker B$. よって $y = 0$ で矛盾．

3° の証明. $\operatorname{ran} B = B((\ker B)^\perp)$ に注意して, $y_n = Bx_n$, $x_n \in (\ker B)^\perp$, $\|y_n - y\| \to 0$ とする. 補題 3.1.15 の証明と同様にして, 2° より $\{x_n\}$ がコーシー列となるから, $x \in (\ker B)^\perp$ が存在して $\|x_n - x\| \to 0$. よって $y = \lim Bx_n = Bx$.

系 4.1.5 より $A^* \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ だから, $B^* = I - A^*$ についても, 上の 1°–3° が成立する. そこで, $\ker B = \{0\}$ として B が可逆であることを示そう. B^* に対する 3° より $\operatorname{ran} B^*$ が閉だから, $\operatorname{ran} B^* = (\ker B)^\perp = \mathcal{H}$. B^* に対する 1° より $\ker B^* = \{0\}$. よって $(\ker B^*)^\perp = \mathcal{H}$ だから, B^* に対して 2° を用いると, $\alpha > 0$ が存在して $\|B^*x\| \geq \alpha\|x\|$ $(x \in \mathcal{H})$. ゆえに補題 3.1.15 より B^* が可逆だから, B も可逆である. ■

補題 4.1.7 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とし, $Ax_k = \lambda_k x_k$, $x_k \neq 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ とする. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ がすべて相異なるならば, $\{x_k\}_{k=1}^n$ は 1 次独立.

証明 n に関する帰納法による. $n = 1$ のときは自明. $n - 1$ で正しいと仮定して, $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = 0$ とする. $\sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k x_k = A(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k) = 0$ だから

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(\lambda_k - \lambda_n)x_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k x_k - \lambda_n \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0.$$

仮定より $\alpha_k(\lambda_k - \lambda_n) = 0$ $(1 \leq k \leq n-1)$. $\lambda_k \neq \lambda_n$ より $\alpha_k = 0$ $(1 \leq k \leq n-1)$. よって $\alpha_n = 0$ も従う. ■

定理 4.1.8 $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ とする.

(1) 任意の $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ は重複度が有限の A の固有値 (i.e. $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$) である.

(2) $\sigma(A) \setminus \{0\}$ は有限集合, または 0 のみを集積点とする可算集合である.

(3) 任意の $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ について, $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A) \Longleftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_{\mathrm{p}}(A^*)$ であり, $\dim\ker(\lambda I - A) = \dim\ker(\overline{\lambda} I - A^*)$.

証明 (1) $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ とすると, $\lambda I - A = \lambda(I - \lambda^{-1}A)$ は可逆でないから, 定理 4.1.6 より $\ker(I - \lambda^{-1}A) \neq \{0\}$. よって $\ker(\lambda I - A) \neq \{0\}$ となり $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$. いま, $\dim\ker(\lambda I - A) = +\infty$ とすると, ONS $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \ker(\lambda I - A)$ がとれる. 命題 4.1.2 より $|\lambda| = \|\lambda x_n\| = \|Ax_n\| \to 0$ となり矛盾. ゆえに λ は重複度が有限の A の固有値.

(2) $\sigma(A) \setminus \{0\}$ が 0 以外の集積点をもたないことを示せばよい．実際このとき，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq 1/m\}$ に含まれる $\sigma(A)$ の点は高々有限個となり，$\sigma(A) \setminus \{0\}$ は高々可算がいえる．いま，$\lambda_0 \neq 0$ が $\sigma(A) \setminus \{0\}$ の集積点と仮定すると，$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \sigma(A) \setminus \{0\}$ が存在して $\lambda_n \neq \lambda_k$ $(n \neq k)$, $\lambda_n \to \lambda_0$. (1) より各 λ_n に対する A の固有ベクトル x_n をとると，補題 4.1.7 より $\{x_n\}$ は 1 次独立となる．グラム-シュミットの直交化 (命題 1.1.10) により，$\{x_n\}$ から ONS $\{e_n\}$ をつくると，各 n に対して $\{\alpha_{nk}\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C}$ がとれて $e_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} x_k$. $z_n = Ae_n - \lambda_n e_n$ とおくと

$$\begin{aligned} z_n &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk}\lambda_k x_k - \lambda_n \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} x_k \\ &\in \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{n-1}\} = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}. \end{aligned}$$

よって $e_n \perp z_n$ となるので

$$\begin{aligned} ||Ae_n||^2 &= ||\lambda_n e_n + z_n||^2 = |\lambda_n|^2 + ||z_n||^2 \\ &\geq |\lambda_n|^2 \to |\lambda_0|^2. \end{aligned}$$

$\lambda_0 \neq 0$ だから $||Ae_n|| \not\to 0$ となり，A のコンパクト性に反する．ゆえに結論が得られた．

(3) A の代わりに $\lambda^{-1}A$ を考えれば $\lambda = 1$ としてよい．後半の等式を示せば十分である．いま，$\dim\ker(I - A) < \dim\ker(I - A^*)$ とすると，初期空間が $\ker(I - A)$ で終空間が $\ker(I - A^*)$ の部分空間である有限階の部分等距離作用素 F がとれる．このとき，$\operatorname{ran} F \subsetneqq \ker(I - A^*) = (\operatorname{ran}(I - A))^{\perp}$. $x \in \ker(I - A + F)$ ならば，$(I - A)x \perp Fx$ だから $(I - A)x = Fx = 0$ となり，$x = 0$ が従う．よって $\ker(I - A + F) = \{0\}$. $A - F \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ だから，定理 4.1.6 より $I - A + F$ は可逆．しかし $\operatorname{ran}(I - A + F) = \operatorname{ran}(I - A) + \operatorname{ran} F \neq \mathcal{H}$ であるから矛盾．したがって $\dim\ker(I - A) \geq \dim\ker(I - A^*)$. A と A^* を入れ替えて，逆の不等式も得られる．■

ここで，コンパクト作用素の固有値展開を扱うときに便利な記号を導入しておこう．

定義 4.1.9　$x, y \in \mathcal{H}$ に対して

$$(x \otimes y)z = \langle z, y \rangle x, \qquad z \in \mathcal{H}$$

と定めると，$x \otimes y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ であることは明らか．この $x \otimes y$ を**シャッテン形式**という．

次の命題は容易なので演習問題としておく．

命題 4.1.10 $x, y, z, u, v \in \mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする．

(1) $||x \otimes y|| = ||x|| \, ||y||$.

(2) $(x \otimes y)^* = y \otimes x$.

(3) $(\lambda x) \otimes y = x \otimes (\overline{\lambda} y) = \lambda (x \otimes y)$.

(4) $(x + y) \otimes z = x \otimes z + y \otimes z$, $x \otimes (y + z) = x \otimes y + x \otimes z$.

(5) $(x \otimes y)(u \otimes v) = \langle u, y \rangle x \otimes v$.

(6) $A(x \otimes y) = (Ax) \otimes y$, $(x \otimes y)A = x \otimes (A^* y)$.

命題 4.1.11 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ を ONS とし，$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ を有界とするとき

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \otimes y_n = \text{s-}\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n x_n \otimes y_n$$

が $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の元として定まり次が成立．

(1) $||A|| = \sup_n |\lambda_n|$.

(2) $A^* = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}_n y_n \otimes x_n$.

(3) $|A| = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| y_n \otimes y_n$.

(4) $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H}) \iff \lambda_n \to 0$.

証明 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して，$l \geq m$ のとき

$$\begin{aligned} \Big|\Big| \sum_{n=m}^{l} \lambda_n \langle x, y_n \rangle x_n \Big|\Big| &= \left\{ \sum_{n=m}^{l} |\lambda_n \langle x, y_n \rangle|^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq \left(\sup_n |\lambda_n| \right) \left\{ \sum_{n=m}^{l} |\langle x, y_n \rangle|^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

ベッセルの不等式 $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, y_n \rangle|^2 \leq ||x||^2$ より $|| \sum_{n=m}^{l} \lambda_n \langle x, y_n \rangle x_n || \to 0$ $(l \geq m \to \infty)$. よって

$$Ax = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (x_n \otimes y_n) x = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, y_n \rangle x_n$$

が定まる．A の線型性は明らか．(4.1) で $m=1$, $l\to\infty$ として $\|Ax\|\le(\sup_n|\lambda_n|)\|x\|$. したがって $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で $\|A\|\le\sup_n|\lambda_n|$. 以下，(1)–(4) を示す．

(1) $Ay_n=\lambda_n x_n$ より $|\lambda_n|=\|Ay_n\|\le\|A\|$. よって $\sup|\lambda_n|\le\|A\|$. 逆は上で示した．

(2) 任意の $x,y\in\mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned}\langle x,A^*y\rangle &= \langle Ax,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle(x_n\otimes y_n)x,y\rangle\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle x,y_n\rangle\langle x_n,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle x,(y_n\otimes x_n)y\rangle.\end{aligned}$$

よって $A^*=\sum\overline{\lambda}_n y_n\otimes x_n$.

(3) 任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned}\langle A^*Ax,x\rangle &= \|Ax\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2|\langle x,y_n\rangle|^2\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2\langle(y_n\otimes y_n)x,x\rangle.\end{aligned}$$

よって $A^*A=\sum|\lambda_n|^2y_n\otimes y_n$. $B=\sum|\lambda_n|y_n\otimes y_n$ とおいて $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ を定めると，$B\ge 0$ は容易．また $B^2=\sum|\lambda_n|^2y_n\otimes y_n=A^*A$. ゆえに $B=|A|$.

(4) $A\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$ とすると，系 4.1.5 より $|A|\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$. (3) より $|A|y_n=|\lambda_n|y_n$ だから，定理 4.1.7 より，任意の $\varepsilon>0$ に対して $|\lambda_n|\ge\varepsilon$ である λ_n は高々有限個．これは $\lambda_n\to 0$ を意味する．逆に $\lambda_n\to 0$ とすると

$$\left\|A-\sum_{n=1}^{N}\lambda_n x_n\otimes y_n\right\|=\left\|\sum_{n>N}\lambda_n x_n\otimes y_n\right\|=\sup_{n>N}|\lambda_n|\to 0\ \ (N\to\infty).$$

$\sum_{n=1}^{N}\lambda_n x_n\otimes y_n$ は有限階だから，命題 4.1.2 より $A\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$. ■

補題 4.1.12　$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ は正規作用素とする．

(1) $Ax=\lambda x$ ならば $A^*x=\overline{\lambda}x$.

(2) $Ax=\lambda x$, $Ay=\mu y$, $\lambda\ne\mu$ ならば $x\perp y$.

(3) $\{x_n\}$ を A の固有ベクトルの列とし $\mathcal{M}=\{x_n\}^{\perp}$ とすると，$A\mathcal{M}\subset\mathcal{M}$, $A^*\mathcal{M}\subset\mathcal{M}$ であり，$A|\mathcal{M}\in\mathcal{B}(\mathcal{M})$ は正規作用素．

証明　(1) A が正規だから $A-\lambda I$ も正規である．命題 2.1.11 より

$$||A^*x-\overline{\lambda}x|| = ||(A-\lambda I)^*x|| = ||(A-\lambda I)x|| = 0.$$

よって $A^*x=\overline{\lambda}x$.

(2) (1) より $A^*y=\overline{\mu}y$ だから

$$\lambda\langle x,y\rangle = \langle Ax,y\rangle = \langle x,A^*y\rangle = \mu\langle x,y\rangle.$$

$\lambda\neq\mu$ より $\langle x,y\rangle=0$.

(3) $Ax_n=\lambda_n x_n$ とすると $A^*x_n=\overline{\lambda}_n x_n$. $x\in\mathcal{M}$ のとき

$$\langle Ax,x_n\rangle = \langle x,A^*x_n\rangle = \lambda_n\langle x,x_n\rangle = 0$$

となるから $Ax\in\mathcal{M}$. 同様に $A^*x\in\mathcal{M}$. よって $A\mathcal{M}\subset\mathcal{M}$, $A^*\mathcal{M}\subset\mathcal{M}$. したがって $A|\mathcal{M}\in\mathcal{B}(\mathcal{M})$ で $(A|\mathcal{M})^*=A^*|\mathcal{M}$ だから，$A|\mathcal{M}$ は正規作用素．■

定理 4.1.13 (固有値展開定理)　A が $\mathcal{H}$ 上のコンパクト正規作用素ならば，有限列または 0 に収束する無限列 $\{\lambda_n\}\subset\mathbb{C}$ と ONS $\{x_n\}$ が存在して

$$A=\sum_n \lambda_n x_n\otimes x_n \tag{4.2}$$

と表される．

証明　$A=0$ のときは自明だから，$A_1=A\neq 0$ とする．命題 3.1.13 より $\hat{\lambda}_1\in\sigma(A_1)$ が存在して $|\hat{\lambda}_1|=||A_1||>0$. 定理 4.1.7 より $\hat{\lambda}_1$ は重複度が有限の固有値であるから，$\ker(\hat{\lambda}_1 I-A_1)$ の CONS $\{x_1,\dots,x_{n_1}\}$ をとり，$\lambda_1=\cdots=\lambda_{n_1}=\hat{\lambda}_1$ とおく．$\mathcal{H}_2=\{x_1,\dots,x_{n_1}\}^\perp$ とすると，補題 4.1.12(3) より $A_2=A|\mathcal{H}_2$ は正規作用素で，明らかにコンパクト．$A_2=0$ のときはここで終る．$A_2\neq 0$ のときは，$\hat{\lambda}_2\in\sigma(A_2)$ が存在して $|\hat{\lambda}_2|=||A_2||>0$. $\ker(\hat{\lambda}_2 I_{\mathcal{H}_2}-A_2)$ ($I_{\mathcal{H}_2}$ は $\mathcal{H}_2$ 上の恒等作用素) の CONS $\{x_{n_1+1},\dots,x_{n_2}\}$ をとり，$\lambda_{n_1+1}=\cdots=\lambda_{n_2}=\hat{\lambda}_2$ とおく．$\mathcal{H}_3=\{x_1,\dots,x_{n_2}\}^\perp$, $A_3=A|\mathcal{H}_3$ として，以下同様にくり返し，ある n で $A_n=0$ となればそこで終り，そうでなければ無限に続ける．このとき，$\{\lambda_n\}\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$ は A の固有値列，$\{x_n\}\subset\mathcal{H}$ は ONS であり，$Ax_n=\lambda_n x_n$. $\{\lambda_n\}$ が無限列のとき，定理 4.1.7

より $\lambda_n \to 0$. さらに，$\mathcal{M}_0 = \{x_n\}^\perp$ とおくと，$A\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_0$ であり，$\{\lambda_n\}$ が無限列のとき $||A|\mathcal{M}_0|| \le \lambda_n \to 0$. よって $A|\mathcal{M}_0 = 0$. これは，$\{\lambda_n\}$ が有限列のときも明らかに成立．任意の k に対して

$$Ax_k = \lambda_k x_k = \sum_n \lambda_n (x_n \otimes x_n) x_k.$$

任意の $x \in \mathcal{M}_0$ に対して

$$Ax = 0 = \sum_n \lambda_n (x_n \otimes x_n) x.$$

$\mathrm{span}\{x_k\}$ が $\mathcal{M}_0^\perp$ で稠密だから (4.2) を得る．■

注意 4.1.14　$A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ が正規のとき，定理 4.1.13 の証明において $\sigma(A) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}$. 実際，$\lambda \neq 0$ のとき

$$\lambda I - A = \sum_n (\lambda - \lambda_n) x_n \otimes x_n + \lambda P_{\mathcal{M}_0}.$$

$\lambda \notin \{\lambda_n\}$ とすると，$\inf_n |\lambda - \lambda_n| > 0$ だから命題 4.1.11 より

$$B = \sum_n (\lambda - \lambda_n)^{-1} x_n \otimes x_n + \lambda^{-1} P_{\mathcal{M}_0}$$

が定まり，$(\lambda I - A)B = B(\lambda I - A) = I$ がすぐに確かめられる．よって $\lambda \notin \sigma(A)$. したがって $\sigma(A) \setminus \{0\} \subset \{\lambda_n\}$. 逆は明らか．$\mathcal{H}$ が無限次元のとき，必ず $0 \in \sigma(A)$ であるが，0 は A の固有値とは限らない．$x_k \otimes x_k$ は互いに直交する 1 次元射影であり

$$P_k = \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} x_n \otimes x_n \quad (\text{ただし } n_0 = 0)$$

とおくと，P_k は $\mathrm{span}\{x_{n_{k-1}+1}, \ldots, x_{n_k}\}$ の上への射影となる．$\sum_k P_k \neq I$ のときは，さらに $P_0 = P_{\mathcal{M}_0}$, $\hat{\lambda}_0 = 0$ とおくと

$$A = \sum_k \hat{\lambda}_k P_k$$

は A のスペクトル分解となる．つまり，コンパクト正規作用素 A のスペクトル測度は離散的であり，(4.2) は A のスペクトル分解をさらに 1 次元射影に細分したものになっている．

定理 4.1.15 $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ ならば，$\mu_n > 0$ で単調減少する $\{\mu_n\}$ (無限列のときは $\mu_n \downarrow 0$) と ONS $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathcal{H}$ が存在して

$$A = \sum_n \mu_n x_n \otimes y_n \tag{4.3}$$

と表される．

証明 極分解 $A = W|A|$ をとる．$|A| \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ なので，$|A|$ に定理 4.1.13 (とその証明) を適用すると，$\mu_n > 0$ で単調減少する $\{\mu_n\}$ と ONS $\{y_n\}$ が存在して $|A| = \sum_n \mu_n y_n \otimes y_n$．$|A|y_n = \mu_n y_n$ より $y_n \in \operatorname{ran}|A|$．$W$ が $\overline{\operatorname{ran}}\,|A|$ 上で等距離だから，$\{Wy_n\}$ は ONS となる．$x_n = Wy_n$ とおくと，命題 4.1.10(6) より

$$A = W|A| = \sum_n \mu_n (Wy_n) \otimes y_n = \sum_n \mu_n x_n \otimes y_n. \quad \blacksquare$$

定義 4.1.16 $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ を (4.3) のように表したとき，命題 4.1.11 より $|A| = \sum \mu_n y_n \otimes y_n$．よって $\{\mu_n\}$ は $|A|$ の固有値を大きい順に重複度分ずつ並べた列として一意的に定まる．この μ_n を $\mu_n(A)$ と表し，A の第 n **特異値**という．ただし，$\dim \mathcal{H} < +\infty$ のときは $n = \dim \mathcal{H}$ までとり，$\dim \mathcal{H} = +\infty$ のときは無限にとる ($\mu_n > 0$ が有限個なら残りは $\mu_n(A) = 0$ とする)．命題 3.1.13 より $\mu_1(A) = \|\,|A|\,\| = \|A\|$ に注意する．

次に与える特異値に関するミニ・マックス原理はしばしば有用である (演習問題 4.7 も参照)．

定理 4.1.17 (ミニ・マックス原理) (1) $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, $A \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} &\mu_n(A) \\ &= \min\left\{ \max_{x \in \mathcal{M}^\perp,\, \|x\|=1} \langle Ax, x\rangle : \mathcal{M} \subset \mathcal{H} \text{ 部分空間, } \dim \mathcal{M} = n-1 \right\}. \end{aligned}$$

(2) $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ のとき

$$\begin{aligned} &\mu_n(A) \\ &= \min\left\{ \max_{x \in \mathcal{M}^\perp,\, \|x\|=1} \|Ax\| : \mathcal{M} \subset \mathcal{H} \text{ 部分空間, } \dim \mathcal{M} = n-1 \right\} \\ &= \min\{\|AP\| : P \text{ 射影, } \dim(I-P) = n-1\}. \end{aligned}$$

ただし，$\dim(I-P)$ は $\operatorname{ran}(I-P)$ の次元を表す．

証明　(1) $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, $A \geq 0$ とする．まず，A のコンパクト性から，$\langle Ax, x\rangle$ が $x \in \mathcal{M}^{\perp}$, $\|x\| = 1$ 上で最大値をとることに注意する．$\lambda_n = \mu_n(A)$ は A の固有値であるから，定理 4.1.13 (とその証明) より，ONS $\{x_n\}$ が存在して $A = \sum_n \lambda_n x_n \otimes x_n$. $\mathcal{M}_0 = \{0\}$, $\mathcal{M}_n = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 1)$ とおくと，$\dim \mathcal{M}_{n-1} = n-1$, $x_n \in \mathcal{M}_{n-1}^{\perp}$, $\langle Ax_n, x_n\rangle = \lambda_n$. 任意の $x \in \mathcal{M}_{n-1}^{\perp}$, $\|x\| = 1$ に対して

$$
\begin{aligned}
\langle Ax, x\rangle &= \sum_k \lambda_k \langle (x_k \otimes x_k)x, x\rangle = \sum_k \lambda_k |\langle x, x_k\rangle|^2 \\
&= \sum_{k \geq n} \lambda_k |\langle x, x_k\rangle|^2 \leq \lambda_n \sum_{k \geq n} |\langle x, x_k\rangle|^2 \\
&\leq \lambda_n \|x\|^2 = \lambda_n.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\max_{x \in \mathcal{M}_{n-1}^{\perp},\, \|x\|=1} \langle Ax, x\rangle = \lambda_n.
$$

他方，部分空間 $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ が $\dim \mathcal{M} = n-1$ のとき，$\|x\| = 1$ である $x \in \mathcal{M}_n \cap \mathcal{M}^{\perp}$ が存在する．実際，$\mathcal{M}$ の CONS $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ をとり $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ とすると，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ の連立 1 次方程式 $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle x_k, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle = 0$ $(j = 1, \ldots, n-1)$ は非自明な解をもつ．このとき

$$
\begin{aligned}
\langle Ax, x\rangle &= \sum_k \lambda_k |\langle x, x_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\langle x, x_k\rangle|^2 \\
&\geq \lambda_n \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k\rangle|^2 = \lambda_n \|x\|^2 = \lambda_n.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\max_{x \in \mathcal{M}^{\perp},\, \|x\|=1} \langle Ax, x\rangle \geq \lambda_n.
$$

ゆえに，求める等式が得られた．

(2) $|A| = \sum_n \mu_n(A) y_n \otimes y_n$ と表すと，$A^*A = |A|^2 = \sum_n \mu_n(A)^2 y_n \otimes y_n$ だから $\mu_n(A^*A) = \mu_n(A)^2$. 上の (1) より

$$
\begin{aligned}
\mu_n(A)^2 &= \min\left\{ \max_{x \in \mathcal{M}^{\perp},\, \|x\|=1} \langle A^*Ax, x\rangle : \dim \mathcal{M} = n-1 \right\} \\
&= \min\left\{ \max_{x \in \mathcal{M}^{\perp},\, \|x\|=1} \|Ax\|^2 : \dim \mathcal{M} = n-1 \right\}.
\end{aligned}
$$

よって

$$\begin{aligned}\mu_n(A) &= \min\left\{\max_{x\in\mathcal{M}^\perp,\,||x||=1}||Ax|| : \dim\mathcal{M} = n-1\right\}\\ &= \min\{||AP_{\mathcal{M}^\perp}|| : \dim\mathcal{M} = n-1\}\\ &= \min\{||AP|| : P\ \text{射影},\ \dim(I-P) = n-1\}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

次は上のミニ・マックス原理の応用例である．

命題 4.1.18 $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とし，$n, m \geq 1$ は任意とする．

(1) $0 \leq A \leq B \Longrightarrow \mu_n(A) \leq \mu_n(B)$.

(2) $\mu_n(A^*) = \mu_n(A)$.

(3) $\mu_n(XAY) \leq ||X||\,||Y||\mu_n(A)$.

(4) $\mu_{m+n-1}(A+B) \leq \mu_m(A) + \mu_n(B)$.

証明 (1) 定理 4.1.17 (1) より明らか．

(2) (4.3) のように $A = \sum_n \mu_n(A)x_n \otimes y_n$ と表すと，命題 4.1.11 より $|A^*| = \sum_n \mu_n(A)x_n \otimes x_n$. よって $\mu_n(A^*) = \mu_n(A)$.

(3) 定理 4.1.17 (2) より

$$\begin{aligned}\mu_n(XA) &= \min\{||XAP|| : P\ \text{射影},\ \dim(I-P) = n-1\}\\ &\leq ||X||\min\{||AP|| : P\ \text{射影},\ \dim(I-P) = n-1\}\\ &= ||X||\mu_n(A).\end{aligned}$$

よって (2) と合わせて

$$\begin{aligned}\mu_n(XAY) &\leq ||X||\mu_n(AY) = ||X||\mu_n(Y^*A^*)\\ &\leq ||X||\,||Y^*||\mu_n(A^*) = ||X||\,||Y||\mu_n(A).\end{aligned}$$

(4) 射影 P_1, P_2 が $\dim(I-P_1) = m-1$, $\dim(I-P_2) = n-1$ のとき，P を $P_1\mathcal{H} \cap P_2\mathcal{H}$ の上への射影とすると

$$\begin{aligned}(I-P)\mathcal{H} &= (P_1\mathcal{H} \cap P_2\mathcal{H})^\perp = [(I-P_1)\mathcal{H} + (I-P_2)\mathcal{H}]^{\perp\perp}\\ &= (I-P_1)\mathcal{H} + (I-P_2)\mathcal{H}.\end{aligned}$$

上の最後の等号は $(I-P_1)\mathcal{H}+(I-P_2)\mathcal{H}$ が有限次元 (ゆえに閉部分空間) であることによる．よって

$$\dim(I-P) \le \dim(I-P_1)+\dim(I-P_2) = m+n-2.$$

定理 4.1.17(2) より

$$\begin{aligned}\mu_{m+n-1}(A+B) &\le \|(A+B)P\| \le \|AP\|+\|BP\| \\ &= \|AP_1P\|+\|BP_2P\| \le \|AP_1\|+\|BP_2\|.\end{aligned}$$

P_1, P_2 について最小化して，求める不等式が得られる． ■

最後に，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の両側イデアルに関しての一般的な結果を与えておこう．

定理 4.1.19 (カルキンの定理)　$\mathcal{I}(\ne\{0\})$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の両側イデアル (線型部分空間であることも含む) とする．

(1) $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ について，$A, A^*, |A|, |A^*|$ のいずれかが $\mathcal{I}$ に属するならば，すべてが $\mathcal{I}$ に属する．

(2) $\mathcal{I}\supset\mathcal{C}_{\rm fin}(\mathcal{H})$.

(3) $\mathcal{H}$ が可分で $\mathcal{I}\ne\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ならば $\mathcal{I}\subset\mathcal{C}(\mathcal{H})$.

証明　(1) 系 4.1.5 と同じく定理 2.2.6 より従う．

(2) $A\in\mathcal{I}\setminus\{0\}$ とすると，$u\in\mathcal{H}$ がとれて $v=Au\ne 0$. 任意の $x,y\in\mathcal{H}$ に対して，$B=(x\otimes v)/\|v\|^2$ とおけば $x=Bv=BAu$. よって

$$x\otimes y=(BAu)\otimes y = BA(u\otimes y)\in\mathcal{I}.$$

$\mathcal{C}_{\rm fin}(\mathcal{H})$ の任意の元は，$\sum_{k=1}^n x_k\otimes y_k$ と表されるので $\mathcal{I}$ に属する．

(3) $\mathcal{I}\not\subset\mathcal{C}(\mathcal{H})$ ならば $\mathcal{I}=\mathcal{B}(\mathcal{H})$ を示す．$A\in\mathcal{I}$, $A\notin\mathcal{C}(\mathcal{H})$ とすると，(1) と系 4.1.5 より $|A|\in\mathcal{I}$, $|A|\notin\mathcal{C}(\mathcal{H})$. $|A|=\int_0^\infty\lambda dE(\lambda)$ を $|A|$ のスペクトル分解 (定理 3.2.20) として $P_n=E([1/n,\infty))$ $(n\in\mathbb{N})$ とおく．$|A|\notin\mathcal{C}(\mathcal{H})$ より，ある $n_0\in\mathbb{N}$ で $\dim P_{n_0}=+\infty$ とならなければならない．実際，すべての $n\in\mathbb{N}$ で $\dim P_n<+\infty$ と仮定すると，$|A|-|A|P_n=\int_{[0,1/n)}\lambda dE(\lambda)$ より $\||A|-|A|P_n\|\le 1/n\to 0$ かつ $|A|P_n\in\mathcal{C}_{\rm fin}(\mathcal{H})$ だから，$|A|\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$ となるからである．$\mathcal{H}$ が可分だから，$\dim P_{n_0}=\dim\mathcal{H}=\aleph_0$ なので，$\mathcal{H}$ から

$\operatorname{ran} P_{n_0}$ の上への等距離作用素 V がとれる．このとき $I = V^*V = V^*P_{n_0}V$. ところで

$$P_{n_0} = \int_{1/n_0}^{\infty} \lambda\lambda^{-1} dE(\lambda) = |A| \left(\int_{1/n_0}^{\infty} \lambda^{-1} dE(\lambda) \right) \in \mathcal{I}.$$

ゆえに $I \in \mathcal{I}$ となるので $\mathcal{I} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. ■

系 4.1.20 (1) $\mathcal{H}$ が可分のとき，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の両側イデアル $\mathcal{I}$ が $\{0\} \subsetneqq \mathcal{I} \subsetneqq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ならば $\mathcal{C}_{\text{fin}}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{C}(\mathcal{H})$.

(2) $\mathcal{I}\,(\neq \{0\})$ が $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の両側閉イデアルならば $\mathcal{I} \supset \mathcal{C}(\mathcal{H})$.

(3) $\dim \mathcal{H} < +\infty$ のとき，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の両側イデアルは $\{0\}$ と $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ のみである．

(4) $\dim \mathcal{H} = \aleph_0$ のとき，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の両側閉イデアルは $\{0\}, \mathcal{C}(\mathcal{H}), \mathcal{B}(\mathcal{H})$ のみである．

証明 (1) は前定理の (2), (3) より明らか．(2) も前定理の (2) より明らか．(3), (4) は上の (1) からすぐにわかる． ■

上の (4) によれば，$\dim \mathcal{H} = \aleph_0$ のとき，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の非自明な両側閉イデアルは $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ だけである．しかし，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の両側イデアルで，ノルム閉ではないが，適当なノルムでそれ自身バナッハ空間になるものが無数に存在する．これらは一般に作用素イデアルと呼ばれる．次節のシャッテン・クラスがその重要な例である．

4.2 シャッテン・クラス作用素

この節では，簡単のため $\mathcal{H}$ は可分とするが，この仮定は本質的なものではない．

補題 4.2.1 $\{e_n\}$ を $\mathcal{H}$ の CONS とする．$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A \geq 0$ のとき

$$\sum_n \langle Ae_n, e_n \rangle \in [0, +\infty]$$

は $\{e_n\}$ の選び方に無関係に定まる．

証明　別に CONS $\{e'_n\}$ をとると

$$\langle Ae_n, e_n\rangle = ||A^{1/2}e_n||^2 = \sum_m |\langle A^{1/2}e_n, e'_m\rangle|^2 = \sum_m |\langle A^{1/2}e'_m, e_n\rangle|^2$$

より

$$\begin{aligned}\sum_n \langle Ae_n, e_n\rangle &= \sum_m \sum_n |\langle A^{1/2}e'_m, e_n\rangle|^2 \\ &= \sum_m ||A^{1/2}e'_m||^2 = \sum_m \langle Ae'_m, e'_m\rangle. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

定義 4.2.2　$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A \geq 0$ に対して

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_n \langle Ae_n, e_n\rangle$$

と定め，A の**トレース**という．ここで，$\{e_n\}$ は $\mathcal{H}$ の任意の CONS としてよい．

定義 4.2.3　$1 \leq p < \infty$ のとき，**シャッテン p-クラス** (または**フォン・ノイマン-シャッテン p-クラス**) $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ を

$$\mathcal{C}_p(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \mathrm{tr}\,|A|^p < +\infty\}$$

と定める．$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，A の**シャッテン p-ノルム**を

$$||A||_p = (\mathrm{tr}\,|A|^p)^{1/p} \ \ (\in [0, +\infty])$$

と定める．このとき，$A \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H}) \iff ||A||_p < +\infty$. 特に

$$\mathcal{C}_1(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \mathrm{tr}\,|A| < +\infty\}$$

を**トレース・クラス**といい，$||A||_1 = \mathrm{tr}\,|A|$ を**トレース・ノルム**という．$\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ の元は**トレース・クラス作用素**と呼ばれる．また

$$\mathcal{C}_2(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \mathrm{tr}\, A^*A < +\infty\}$$

を**ヒルベルト-シュミット・クラス**といい，$||A||_2 = (\mathrm{tr}\, A^*A)^{1/2}$ を**ヒルベルト-シュミット・ノルム**という．$\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ の元は**ヒルベルト-シュミット作用素**と呼ばれる．

補題 4.2.4 $1 \leq p < \infty$ のとき，$\mathcal{C}_p(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{H})$ であり，任意の $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ に対して

$$||A||_p = \left(\sum_n \mu_n(A)^p\right)^{1/p}. \tag{4.4}$$

よって，$A \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H}) \iff \sum_n \mu_n(A)^p < +\infty$.

証明 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について，$|A|$ のスペクトル分解を $|A| = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda)$ とする．$A \notin \mathcal{C}(\mathcal{H})$ ならば，定理 4.1.19 (3) の証明で示したように，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ で $\dim E([1/n_0, \infty)) = +\infty$ となる．このとき，$P = E([1/n_0, \infty))$ とおくと，$|A|^p = \int \lambda^p dE(\lambda)$ より $|A|^p P \geq (1/n_0)^p P$. $\operatorname{ran} P$ に含まれる ONS $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ をとり，$\{x_k\}$ を含む $\mathcal{H}$ の CONS を考えれば

$$\operatorname{tr}|A|^p \geq \sum_k \langle |A|^p x_k, x_k\rangle \geq \sum_k \left(\frac{1}{n_0}\right)^p ||x_k||^2 = +\infty.$$

よって $A \notin \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$. したがって $\mathcal{C}_p(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{H})$.

$A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ のとき，$|A|$ の固有値展開より，CONS $\{y_k\}$ がとれて $|A| = \sum_k \mu_k(A) y_k \otimes y_k$ と表される．$|A|^p = \sum_k \mu_k(A)^p y_k \otimes y_k$ だから，$\{y_k\}$ を含む $\mathcal{H}$ の CONS $\{e_n\}$ をとると

$$\operatorname{tr}|A|^p = \sum_n \langle |A|^p e_n, e_n\rangle = \sum_k \langle |A|^p y_k, y_k\rangle = \sum_k \mu_k(A)^p.$$

よって $||A||_p = (\sum_k \mu_k(A)^p)^{1/p}$. ■

命題 4.2.5 $1 \leq p < p' < \infty$ とし，$A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする．

(1) $||A|| \leq ||A||_{p'} \leq ||A||_p$.

(2) $\mathcal{C}_p(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}_{p'}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{H})$.

(3) $||A^*||_p = ||A||_p$. よって，$A \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H}) \iff A^* \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$.

(4) $||AB||_p \leq ||B||\,||A||_p$, $||BA||_p \leq ||B||\,||A||_p$. よって $A \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ならば $AB, BA \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$.

証明 (1) $A \notin \mathcal{C}(\mathcal{H})$ なら補題 4.2.4 より $||A||_{p'} = ||A||_p = +\infty$ となるので，$A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ としてよい．このとき (4.4) より

$$||A|| = \mu_1(A) \leq \left(\sum_n \mu_n(A)^{p'}\right)^{1/p'} = ||A||_{p'}.$$

また，$||A||_p < +\infty$ として

$$\sum_n \left(\frac{\mu_n(A)}{||A||_p}\right)^p = \frac{1}{||A||_p^p}\sum_n \mu_n(A)^p = 1$$

だから，$(\mu_n(A)/||A||_p)^{p'} \leq (\mu_n(A)/||A||_p)^p$ となり，$\sum_n(\mu_n(A)/||A||_p)^{p'} \leq 1$, i.e. $\sum_n \mu_n(A)^{p'} \leq ||A||_p^{p'}$. よって $||A||_{p'} \leq ||A||_p$.

(2) $\mathcal{C}_p(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}_{p'}(\mathcal{H})$ は (1) より明らか．$\mathcal{C}_{p'}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{H})$ は補題 4.2.4 で示した．

(3), (4) は (4.4) と命題 4.1.18 の (2), (3) より明らか． ■

一般の $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ に関する結果を述べる前に，まずトレース・クラス作用素に対するトレースについて説明する．

補題 4.2.6　$\{e_n\}$ を $\mathcal{H}$ の CONS とする．任意の $A \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ に対して，$\sum_n \langle Ae_n, e_n\rangle$ は絶対収束し，この和は $\{e_n\}$ の選び方によらない．

証明　$A \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ の極分解 $A = W|A|$ をとる．

$$\begin{aligned}
|\langle Ae_n, e_n\rangle| &= |\langle |A|^{1/2}e_n, |A|^{1/2}W^*e_n\rangle| \\
&\leq ||\,|A|^{1/2}e_n||\,||\,|A|^{1/2}W^*e_n|| \\
&\leq \frac{1}{2}(||\,|A|^{1/2}e_n||^2 + ||\,|A|^{1/2}W^*e_n||^2) \\
&= \frac{1}{2}(\langle |A|e_n, e_n\rangle + \langle W|A|W^*e_n, e_n\rangle)
\end{aligned}$$

を n について加えて

$$\sum_n |\langle Ae_n, e_n\rangle| \leq \frac{1}{2}(||A||_1 + ||W|A|W^*||_1).$$

命題 4.2.5 (4) より $||W|A|W^*||_1 \leq ||A||_1$ だから

$$\sum_n |\langle Ae_n, e_n\rangle| \leq ||A||_1. \tag{4.5}$$

よって $\sum_n \langle Ae_n, e_n\rangle$ は絶対収束する．別に CONS $\{e'_n\}$ をとると

$$\sum_n \langle Ae_n, e_n\rangle \quad = \quad \sum_n \langle |A|^{1/2}e_n, |A|^{1/2}W^*e_n\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_n \sum_m \langle |A|^{1/2} e_n, e'_m \rangle \langle e'_m, |A|^{1/2} W^* e_n \rangle \\
&= \sum_m \sum_n \langle W|A|^{1/2} e'_m, e_n \rangle \langle e_n, |A|^{1/2} e'_m \rangle \\
&= \sum_m \langle W|A|^{1/2} e'_m, |A|^{1/2} e'_m \rangle. \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

上で $\sum_n$ と $\sum_m$ の順序が交換可能なのは

$$
\begin{aligned}
&\sum_n \sum_m |\langle |A|^{1/2} e_n, e'_m \rangle \langle e'_m, |A|^{1/2} W^* e_n \rangle| \\
&\quad \le \frac{1}{2} \sum_n \sum_m (|\langle |A|^{1/2} e_n, e'_m \rangle|^2 + |\langle e'_m, |A|^{1/2} W^* e_n \rangle|^2) \\
&\quad = \frac{1}{2} \sum_n (\| |A|^{1/2} e_n \|^2 + \| |A|^{1/2} W^* e_n \|^2) \le \|A\|_1 < +\infty
\end{aligned}
$$

であることによる．$\{e_n\}$ を $\{e'_n\}$ に置き換えて (4.6) と同じく計算すると

$$
\sum_n \langle A e'_n e'_n \rangle = \sum_m \langle W|A|^{1/2} e'_m, |A|^{1/2} e'_m \rangle.
$$

よって $\sum_n \langle A e_n, e_n \rangle = \sum_n \langle A e'_n, e'_n \rangle$. ■

$A \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ に対して，定義 4.2.2 を拡張して $\mathrm{tr}\, A = \sum_n \langle A e_n, e_n \rangle$ と定め，A の**トレース**という．(4.5) より明らかに

$$
|\mathrm{tr}\, A| \le \|A\|_1. \qquad (4.7)
$$

測度空間上の L^p-空間では，L^p-ノルムの 3 角不等式 (ミンコフスキーの不等式) はヘルダーの不等式を使って示される (演習問題 1.2)．$\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ の空間でも，ヘルダーの不等式を先に証明すると都合がよい．そのためには関数論の 3 線定理を用いるのが早道である．3 線定理について，証明は省略して結果だけを補題として述べておく．

補題 4.2.7 (3 線定理) $a < b$ とし，関数 f が帯状領域 $\{\zeta \in \mathbb{C} : a \le \mathrm{Re}\zeta \le b\}$ で有界連続であり，その内部で解析的ならば

$$
F(s) = \log\left(\sup_{\mathrm{Re}\,\zeta = s} |f(\zeta)| \right), \qquad a \le s \le b
$$

は $[a,b]$ で凸関数となる．よって $\mathrm{Re}\,\zeta=(1-\theta)a+\theta b$ $(0<\theta<1)$ のとき

$$|f(\zeta)|\le\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}|f(a+it)|\right)^{1-\theta}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}|f(b+it)|\right)^{\theta}.$$

命題 4.2.8 (ヘルダーの不等式)　$1<p,q<\infty$, $1/p+1/q=1$ とする．$A\in\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$, $B\in\mathcal{C}_q(\mathcal{H})$ ならば，$AB\in\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ で $||AB||_1\le||A||_p||B||_q$.
($p=1$, $q=\infty$ でも，$(\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H}),||\cdot||_\infty)=(\mathcal{B}(\mathcal{H}),||\cdot||)$ とすれば命題 4.2.5 (4) より成立.)

証明　まず，A,B が有限階として，定理 4.1.15 より $A=\sum_{j=1}^m\alpha_jx_j\otimes y_j$, $B=\sum_{k=1}^n\beta_ku_k\otimes v_k$ と展開する．ここで $\alpha_j,\beta_k>0$ で $\{x_j\}$, $\{y_j\}$, $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ は ONS. 極分解 $A=W_1|A|$, $B=W_2|B|$, $AB=W_3|AB|$ をとって

$$f(\zeta)=\mathrm{tr}(W_3^*W_1|A|^{p\zeta}W_2|B|^{q(1-\zeta)}),\qquad 0\le\mathrm{Re}\,\zeta\le1$$

と定める．

$$W_1|A|^{p\zeta}=\sum_{j=1}^m\alpha_j^{p\zeta}W_1y_j\otimes y_j,\quad W_2|B|^{q(1-\zeta)}=\sum_{k=1}^n\beta_k^{q(1-\zeta)}W_2v_k\otimes v_k$$

だから，$f(\zeta)$ は $\alpha_j^{p\zeta}\beta_k^{q(1-\zeta)}$ の 1 次結合で表される．よって $f(\zeta)$ は $0\le\mathrm{Re}\,\zeta\le1$ で有界連続であり，その内部で解析的である．$t\in\mathbb{R}$ のとき，(4.7) と命題 4.2.5 (4) より

$$\begin{aligned}|f(it)| &= |\mathrm{tr}(W_3^*W_1|A|^{ipt}W_2|B|^q|B|^{-iqt})|\\ &\le ||\,|B|^q||_1=||B||_q^q,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|f(1+it)| &= |\mathrm{tr}(W_3^*W_1|A|^p|A|^{ipt}W_2|B|^{-iqt})|\\ &\le ||\,|A|^p||_1=||A||_p^p,\end{aligned}$$

したがって，前補題と $q(1-1/p)=1$ より

$$|f(1/p)|\le(||B||_q^q)^{1-1/p}(||A||_p^p)^{1/p}=||A||_p||B||_q.$$

ところで

$$\begin{aligned}f(1/p) &= \mathrm{tr}(W_3^*W_1|A|W_2|B|)=\mathrm{tr}(W_3^*AB)\\ &= \mathrm{tr}(|AB|)=||AB||_1.\end{aligned}$$

ゆえに $||AB||_1 \leq ||A||_p||B||_q$.

次に，$A \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H}), B \in \mathcal{C}_q(\mathcal{H})$ として，(4.3) のように $A = \sum_n \mu_n(A)x_n \otimes y_n$，$B = \sum_n \mu_n(B)u_n \otimes v_n$ と表す．補題 4.2.4 より $\sum_n \mu_n(A)^p < +\infty$，$\sum_n \mu_n(B)^q < +\infty$.

$$A_m = \sum_{n=1}^{m} \mu_n(A)x_n \otimes y_n, \qquad B_m = \sum_{n=1}^{m} \mu_n(B)u_n \otimes v_n$$

とおくと，命題 4.2.5 (1) と補題 4.2.4 より

$$||A_m - A|| \leq ||A_m - A||_p = \left(\sum_{n>m} \mu_n(A)^p\right)^{1/p} \to 0 \ \ (m \to \infty),$$

$$||B_m - B|| \leq ||B_m - B||_q = \left(\sum_{n>m} \mu_n(B)^q\right)^{1/q} \to 0 \ \ (m \to \infty).$$

よって $||A_mB_m - AB|| \to 0$ となり，$||\,|A_mB_m| - |AB|\,|| \to 0$ が従う (演習問題 3.2)．CONS $\{e_n\}$ をとると，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{n=1}^{N}\langle |A_mB_m|e_n, e_n\rangle \leq ||A_mB_m||_1 \leq ||A_m||_p||B_m||_q.$$

上で 2 番目の不等号は証明の前半による．$m \to \infty$ のとき $||A_m||_p \to ||A||_p$，$||B_m||_q \to ||B||_q$ だから

$$\sum_{n=1}^{N}\langle |AB|e_n, e_n\rangle \leq ||A||_p||B||_q.$$

$N \to \infty$ として $\sum_n\langle |AB|e_n, e_n\rangle \leq ||A||_p||B||_q$. したがって $AB \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ で $||AB||_1 \leq ||A||_p||B||_q$. ■

補題 4.2.9 (1) $1 < p, q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ のとき，任意の $A \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ に対して

$$||A||_p = \sup\{|\mathrm{tr}(AB)| : B \in \mathcal{C}_q(\mathcal{H}),\ ||B||_q \leq 1\}.$$

(2) 任意の $A \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ に対して

$$\begin{aligned} ||A||_1 &= \sup\{|\mathrm{tr}(AB)| : B \in \mathcal{C}(\mathcal{H}),\ ||B|| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\mathrm{tr}(AB)| : B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ ||B|| \leq 1\}. \end{aligned}$$

証明　(1) $A \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ とする．$B \in \mathcal{C}_q(\mathcal{H})$, $||B||_q \le 1$ ならば，命題 4.2.8 より

$$|\mathrm{tr}(AB)| \le ||AB||_1 \le ||A||_p ||B||_q \le ||A||_p.$$

極分解 $A = W|A|$ をとって $B = ||A||_p^{-p/q}|A|^{p-1}W^*$ とおくと

$$\begin{aligned} B^*B &= ||A||_p^{-2p/q} W|A|^{2(p-1)}W^* \\ &= ||A||_p^{-2p/q}(W|A|W^*)^{2(p-1)} = ||A||_p^{-2p/q}|A^*|^{2(p-1)}. \end{aligned}$$

よって $|B|^q = (B^*B)^{q/2} = ||A||_p^{-p}|A^*|^p$ となり $|| \, |B|^q||_1 = ||A||_p^{-p}||A^*||_p^p = 1$ (命題 4.2.5 (3))．したがって $B \in \mathcal{C}_q(\mathcal{H})$, $||B||_q = 1$．このとき

$$AB = ||A||_p^{-p/q} W|A|^p W^* = ||A||_p^{-p/q}|A^*|^p$$

だから $\mathrm{tr}(AB) = ||A||_p^{-p/q}||A^*||_p^p = ||A||_p$．ゆえに結論の式を得る．

(2) $A \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ とすると，任意の $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $||B|| \le 1$ に対して

$$|\mathrm{tr}(AB)| \le ||AB||_1 \le ||A||_1.$$

極分解 $A = W|A|$ をとり，(4.3) のように $A = \sum_n \mu_n(A) x_n \otimes y_n$ と表す．$P_N = \sum_{n=1}^N x_n \otimes x_n$ (有限階の射影) とおくと，$|A^*| = \sum_n \mu_n(A) x_n \otimes x_n$ だから

$$\begin{aligned} ||A||_1 &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \mu_n(A) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \langle |A^*|P_N x_n, x_n \rangle \\ &= \lim_{N\to\infty} \mathrm{tr}(|A^*|P_N) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{tr}(AW^*P_N). \end{aligned}$$

$W^*P_N \in \mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{H})$ で $||W^*P_N|| \le 1$ だから，結論がいえる．■

命題 4.2.10　$1 \le p < \infty$ のとき，$(\mathcal{C}_p(\mathcal{H}), ||\cdot||_p)$ はノルム空間であり，$\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の両側イデアルである．

証明　$A, B \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$, $\alpha \in \mathbb{C}$ とする．$||A|| \le ||A||_p$ より $||A||_p \ge 0$ で，$||A||_p = 0 \Longrightarrow A = 0$ は明らか．$\alpha A \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$, $||\alpha A||_p = |\alpha| \, ||A||_p$ も簡単．命題 4.1.18 (4) より

$$\mu_{2n}(A+B) \le \mu_{2n-1}(A+B) \le \mu_n(A) + \mu_n(B).$$

よって

$$\sum_n \mu_{2n}(A+B)^p \leq \sum_n (\mu_n(A)+\mu_n(B))^p < +\infty.$$

同じく $\sum_n \mu_{2n-1}(A+B)^p < +\infty$. ゆえに $\sum_n \mu_n(A+B)^p < +\infty$ となり $A+B \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$. そこで $1/p+1/q=1$ とする．ただし $p=1$ のときは，$q=\infty$ で $(\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty) = (\mathcal{C}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ とみなす．$C \in \mathcal{C}_q(\mathcal{H})$, $\|C\|_q \leq 1$ のとき，補題 4.2.9 より

$$\begin{aligned} |\mathrm{tr}((A+B)C)| &= |\mathrm{tr}(AC)+\mathrm{tr}(BC)| \leq |\mathrm{tr}(AC)|+|\mathrm{tr}(BC)| \\ &\leq \|A\|_p + \|B\|_p. \end{aligned}$$

C について左辺の sup をとって $\|A+B\|_p \leq \|A\|_p + \|B\|_p$. 以上より，$\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の部分空間であり，$\|\cdot\|_p$ は $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ のノルムとなる．さらに，命題 4.2.5 (4) より $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の両側イデアルになる． ■

空間 $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ $(1 \leq p < \infty)$, $\mathcal{C}(\mathcal{H})$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の間の双対関係は，次のようにまとめられる．

定理 4.2.11 (1) $1 < p < \infty$, $1/p+1/q=1$ とする．$(A,B) \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H}) \times \mathcal{C}_q(\mathcal{H}) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ により $\mathcal{C}_p(\mathcal{H}) \cong \mathcal{C}_q(\mathcal{H})^*$ (等距離同型)．つまり，$A \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ に対して $\varphi_A(B) = \mathrm{tr}(AB)$ $(B \in \mathcal{C}_q(\mathcal{H}))$ と定めると，$A \mapsto \varphi_A$ は $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ から $\mathcal{C}_q(\mathcal{H})^*$ の上への等距離同型写像となる．よって $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ $(1 \leq p < \infty)$ はバナッハ空間．

(2) $(A,B) \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H}) \times \mathcal{C}(\mathcal{H}) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ により $\mathcal{C}_1(\mathcal{H}) \cong \mathcal{C}(\mathcal{H})^*$ (等距離同型)．よって $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ はバナッハ空間．

(3) $(A,B) \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ により $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \cong \mathcal{C}_1(\mathcal{H})^*$ (等距離同型)．

証明 (1) と (2) をまとめて証明する．以下で，$p=1$ のときは，$q=\infty$ で $(\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty) = (\mathcal{C}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ とする．$A \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ に対して，φ_A を (1) で述べたように定めると，補題 4.2.9 より $\varphi_A \in \mathcal{C}_q(\mathcal{H})^*$, $\|A\|_p = \|\varphi_A\|$ が成立する．$A \mapsto \varphi_A$ の線型性は明らかなので，全射であることを示せばよい．任意の $\varphi \in \mathcal{C}_q(\mathcal{H})^*$ に対して

$$\hat{\varphi}(x,y) = \varphi(x \otimes y), \qquad x, y \in \mathcal{H}$$

と定めると，$\hat{\varphi}:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ は双線型汎関数となる．$||x\otimes y||_q=||x||\,||y||$ (演習問題 4.9) より $|\hat{\varphi}(x,y)|\le||\varphi||\,||x||\,||y||$ となるから，補題 2.1.4 より $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在して $\hat{\varphi}(x,y)=\langle Ax,y\rangle$ $(x,y\in\mathcal{H})$. よって

$$\varphi(x\otimes y)=\langle Ax,y\rangle=\mathrm{tr}(A(x\otimes y)).$$

これより

$$\varphi(B)=\mathrm{tr}(AB),\qquad B\in\mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H}).\tag{4.8}$$

極分解 $A=W|A|$ とスペクトル分解 $|A^*|=\int_0^\infty\lambda dE(\lambda)$ をとり，$N\in\mathbb{N}$ を任意に固定して $P_N=E([1/N,\infty))$ とおく．いま $\dim P_N=+\infty$ として，ONS $\{y_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathrm{ran}\,P_N$ をとる．各 $m\in\mathbb{N}$ に対して $B=\sum_{n=1}^m y_n\otimes y_n\in\mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ とおいて，(4.8) より

$$\begin{aligned}\frac{m}{N}&\le\sum_{n=1}^m\langle|A^*|y_n,y_n\rangle=\mathrm{tr}(|A^*|B)=\mathrm{tr}(AW^*B)\\&=\varphi(W^*B)\le||\varphi||\,||W^*B||_q\le||\varphi||\,||B||_q=||\varphi||m^{1/q}.\end{aligned}$$

よって $m^{1-1/q}\le N||\varphi||$ となるが，$m\to\infty$ として矛盾．したがって $\dim P_N<+\infty$ $(N\in\mathbb{N})$ となり，定理 4.1.19 (3) の証明の議論から $|A^*|\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$. そこで $|A^*|=\sum_n\mu_nx_n\otimes x_n$ を固有値展開とする．各 $m\in\mathbb{N}$ に対して，$1<p<\infty$ なら $\lambda_n=\mu_n^{p-1}/(\sum_{j=1}^m\mu_j^p)^{1/q}$ $(n=1,\ldots,m)$, $p=1$ なら $\lambda_n=1$ $(n=1,\ldots,m)$ とおく．$B=\sum_{n=1}^m\lambda_nx_n\otimes x_n$ について，$||B||_q=(\sum_{n=1}^m|\lambda_n|^q)^{1/q}\le1$ ($p=1$ なら $||B||=1$) だから

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^m\mu_n^p\right)^{1/p}&=\sum_{n=1}^m\mu_n\lambda_n=\mathrm{tr}(|A^*|B)\\&=\varphi(W^*B)\le||\varphi||\,||B||_q=||\varphi||.\end{aligned}$$

上で $m\to\infty$ として $\sum_n\mu_n^p<+\infty$. したがって $A\in\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$. このとき，$\mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ が $(\mathcal{C}_q(\mathcal{H}),||\cdot||_q)$ で稠密だから，(4.8) より $\varphi=\varphi_A$ を得る．これで $A\in\mathcal{C}_p(\mathcal{H})\mapsto\varphi_A\in\mathcal{C}_q(\mathcal{H})^*$ が全射の等距離線型写像であることが示せた．最後に，ノルム空間の双対空間はバナッハ空間であるから，$\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ はバナッハ空間になる．

(3) は演習問題とする．■

命題 4.2.12 $1 < p, q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ のとき，任意の $A \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{C}_q(\mathcal{H})$ に対して $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. $A \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対しても同じ式が成立.

証明 $A \in \mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ のとき，$A = \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k$ と表される．このとき，任意の $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，$\mathrm{tr}(x \otimes y) = \langle x, y \rangle$ (演習問題 4.9) に注意して

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AB) &= \mathrm{tr}\left(\sum_{k=1}^n x_k \otimes B^* y_k\right) = \sum_{k=1}^n \langle x_k, B^* y_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \langle Bx_k, y_k \rangle = \mathrm{tr}(BA).\end{aligned}$$

$A \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ $(1 \leq p < \infty)$ とする．$\mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ が $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ で稠密だから，$\{A_n\} \subset \mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ がとれて $||A_n - A||_p \to 0$. このとき

$$|\mathrm{tr}(A_n B) - \mathrm{tr}(AB)| \leq ||(A_n - A)B||_1 \leq ||A_n - A||_p ||B||_q \to 0.$$

同様に $|\mathrm{tr}(BA_n) - \mathrm{tr}(BA)| \to 0$. 最初に示したことから $\mathrm{tr}(A_n B) = \mathrm{tr}(BA_n)$. よって $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. ■

$1 < p < \infty$ のとき，定理 4.2.11 より $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ は回帰的バナッハ空間であることがわかる．特に，$\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ は次に述べるようにヒルベルト空間になる.

命題 4.2.13 $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ は内積 $\langle A, B \rangle_2 = \mathrm{tr}(B^* A)$ $(A, B \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H}))$ によりヒルベルト空間.

証明 $A, B \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ のとき，命題 4.2.8 より $\langle A, B \rangle_2 = \mathrm{tr}(B^* A)$ が定義できる．これが内積の条件を満たすことは簡単に確かめられる．$\langle A, A \rangle_2 = \mathrm{tr}(A^* A) = ||A||_2^2$ であるので，内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ から入るノルムは $||\cdot||_2$ と一致する．$||\cdot||_2$ が完備だから，$\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ は $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ によりヒルベルト空間となる. ■

$\mathcal{H}$ の CONS $\{e_n\}$ を用いて，$A, B \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ の内積は

$$\langle A, B \rangle_2 = \sum_n \langle B^* A e_n, e_n \rangle = \sum_n \langle A e_n, B e_n \rangle$$

と与えられる.

例 4.2.14　$\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ とする．すべての $1 \le p < \infty$ に対して，線型空間として $\mathcal{C}_p(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}) = M_n(\mathbb{C})$ と同一視できる (命題 2.1.7)．$\{e_j\}_{j=1}^n$ を $\mathbb{C}^n$ の標準基底とすると，$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ に対して

$$\langle A, B\rangle_2 = \sum_{j=1}^n \langle Ae_j, Be_j\rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\bar{b}_{ij}.$$

これより，ヒルベルト空間として $\mathcal{C}_2(\mathbb{C}^n) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ がわかる．また，命題 2.1.7 の証明で示したが，$||A|| \le ||A||_2 = (\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2)^{1/2}$ が成立．

以下，L^2-空間上のヒルベルト-シュミット作用素と積分作用素との関係を示そう．$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とし，$L^2(\Omega)$ を 2 乗可積分な複素関数からなるヒルベルト空間とする (例 1.1.8 (3))．直積測度空間 $(\Omega\times\Omega, \mathcal{F}\otimes\mathcal{F}, \mu\otimes\mu)$ 上の 2 乗可積分な関数 $K \in L^2(\Omega\times\Omega)$ をとる．$L^2(\Omega\times\Omega)$ の L^2-ノルムを $||\cdot||_2$ で表すと，フビニの定理を使って

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left\{\int_\Omega |K(\omega,\omega')|^2 d\mu(\omega')\right\}d\mu(\omega) &= \int_{\Omega\times\Omega} |K(\omega,\omega')|^2 d\mu\otimes\mu \\ &= ||K||_2^2 < +\infty.\end{aligned}$$

よって a.e. $\omega \in \Omega$ に対して $\int_\Omega |K(\omega,\omega')|^2 d\mu(\omega') < +\infty$, i.e. $K(\omega,\cdot) \in L^2(\Omega)$. ゆえに，任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して

$$(\tilde{K}f)(\omega) = \int_\Omega K(\omega,\omega')f(\omega')d\mu(\omega')$$

が a.e. ω で定義される．このとき

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |(\tilde{K}f)(\omega)|^2 d\mu(\omega) \\ &\le \int_\Omega\left\{\int_\Omega |K(\omega,\omega')|\,|f(\omega)|d\mu(\omega')\right\}^2 d\mu(\omega) \\ &\le \int_\Omega\left\{\int_\Omega |K(\omega,\omega')|^2 d\mu(\omega')\int_\Omega |f(\omega')|^2 d\mu(\omega')\right\}d\mu(\omega) \\ &= ||K||_2^2||f||^2\end{aligned}$$

だから，$\tilde{K}f \in L^2(\Omega)$ で $||\tilde{K}f|| \le ||K||_2||f||$. $\tilde{K}$ の線型性は明らかなので，$\tilde{K} \in \mathcal{B}(L^2(\Omega))$, $||\tilde{K}|| \le ||K||_2$ が示せた．$L^2(\Omega)$ 上のこの作用素 $\tilde{K}$ を K を積分核にもつ**積分作用素**という．

定理 4.2.15 任意の $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ に対して，上のように $\tilde{K}$ を定めると $\tilde{K} \in \mathcal{C}_2(L^2(\Omega))$. さらに，$K \mapsto \tilde{K}$ は $L^2(\Omega \times \Omega)$ から $\mathcal{C}_2(L^2(\Omega))$ の上への等距離同型写像である．よってヒルベルト空間として $\mathcal{C}_2(L^2(\Omega)) \cong L^2(\Omega \times \Omega)$.

証明 $L^2(\Omega)$ の CONS $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとる (この節の仮定に合わせて $L^2(\Omega)$ は可分としておく)．このとき，$\{h_n(\omega)\overline{h_m(\omega')}\}_{m,n=1}^{\infty}$ が $L^2(\Omega\times\Omega)$ の CONS となる．実際，ONS であることは容易にわかる．完全性については，$F \in L^2(\Omega\times\Omega)$ が

$$\int_{\Omega\times\Omega} F(\omega,\omega')\overline{h_n(\omega)\overline{h_m(\omega')}}d\mu\otimes\mu = 0, \qquad m,n \geq 1$$

とする．

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\left\{\int_{\Omega}|F(\omega,\omega')h_m(\omega')|d\mu(\omega')\right\}^2 d\mu(\omega) \\
&\quad \leq \int_{\Omega}\left\{\int_{\Omega}|F(\omega,\omega')|^2 d\mu(\omega')\int_{\Omega}|h_m(\omega')|^2 d\mu(\omega')\right\}d\mu(\omega) \\
&\quad = ||F||_2^2 < +\infty
\end{aligned}$$

だから $\int_{\Omega} F(\cdot,\omega')h_m(\omega')d\mu(\omega') \in L^2(\Omega)$. また，フビニの定理より

$$\int_{\Omega}\left\{\int_{\Omega}F(\omega,\omega')h_m(\omega')d\mu(\omega')\right\}\overline{h_n(\omega)}d\mu(\omega) = 0.$$

$\{h_n\}$ が $L^2(\Omega)$ の CONS であったから

$$\int_{\Omega}F(\omega,\omega')h_m(\omega')d\mu(\omega') = 0 \text{ a.e. } \omega, \qquad m \geq 1$$

となり，a.e. $\omega \in \Omega$ に対して $F(\omega,\omega') = 0$ a.e. ω'. これより，$L^2(\Omega \times \Omega)$ の元として $F = 0$ が従う．

$K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ ならば

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\tilde{K}^*\tilde{K}) &= \sum_m ||\tilde{K}h_m||^2 = \sum_{m,n}|\langle\tilde{K}h_m,h_n\rangle|^2 \\
&= \sum_{m,n}\left|\int_{\Omega}\left\{\int_{\Omega}K(\omega,\omega')h_m(\omega')d\mu(\omega')\right\}\overline{h_n(\omega)}d\mu(\omega)\right|^2 \\
&= \sum_{m,n}\left|\int_{\Omega\times\Omega}K(\omega,\omega')\overline{h_n(\omega)\overline{h_m(\omega')}}d\mu\otimes\mu\right|^2 = ||K||_2^2.
\end{aligned}$$

上の最後の等号は $L^2(\Omega \times \Omega)$ におけるリース-フィッシャーの等式による．よって $\tilde{K} \in \mathcal{C}_2(L^2(\Omega))$ で $||\tilde{K}||_2 = ||K||_2$．$K \mapsto \tilde{K}$ の線型性は明らかなので，全射を示せばよい．任意の $A \in \mathcal{C}_2(L^2(\Omega))$ は，ONS $\{f_k\}, \{g_k\} \subset L^2(\Omega)$ と $\mu_k > 0$ により，$A = \sum_k \mu_k f_k \otimes g_k$ と展開できて $\sum_k \mu_k^2 = ||A||_2^2 < +\infty$．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$K_n(\omega, \omega') = \sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k(\omega)\overline{g_k(\omega')}$$

とおくと，$K_n \in L^2(\Omega \times \Omega)$ であり，$\tilde{K}_n = \sum_{k=1}^n \mu_k f_k \otimes g_k$ が簡単に確かめられる．よって

$$||\tilde{K}_n - A||_2 = \left(\sum_{k>n} \mu_k^2\right)^{1/2} \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

したがって $||K_m - K_n||_2 = ||\tilde{K}_m - \tilde{K}_n||_2 \to 0$ $(m, n \to \infty)$ だから，$K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ が存在して $||\tilde{K}_n - \tilde{K}||_2 = ||K_n - K||_2 \to 0$．これより $A = \tilde{K}$．ゆえに $K \in L^2(\Omega \times \Omega) \mapsto \tilde{K} \in \mathcal{C}_2(L^2(\Omega))$ は全射であり，結論がいえた．■

最後に，フォン・ノイマン環論との関係でいくつかの注意を与えておく．

注意 4.2.16　(1) $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ は I 型と呼ばれるフォン・ノイマン環であるが，その前双対空間が $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ であることを定理 4.2.11 は意味している．$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の線型汎関数 φ が**正規状態**とは，$\varphi(X^*X) \geq 0$ $(X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, $\varphi(I) = 1$, かつネット $\{X_\alpha\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が $0 \leq X_\alpha \uparrow X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ のとき $\varphi(X_\alpha) \uparrow \varphi(X)$ となるときをいう．φ が $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の正規状態であるための同値条件は，$A \geq 0$ かつ $\mathrm{tr}\, A = 1$ の $A \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ が存在して $\varphi(X) = \mathrm{tr}(AX)$ と表されることである．このような A は量子力学との関連で**密度作用素**と呼ばれる．

(2) $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ のとき $||XA||_2 \leq ||X||\,||A||_2$ であるから，$A \mapsto XA$ は $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ 上の有界作用素となる．このように $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ の要素に左側から掛けることにより，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ 上に表現することができる (詳しくは演習問題 4.15)．これは，フォン・ノイマン環論で標準表現と呼ばれるものである．

(3) この節の議論から，次の対応が自然に考えられる：

$$\mathcal{C}(\mathcal{H}) \quad \longleftrightarrow \quad c_0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_p(\mathcal{H}) &\longleftrightarrow \ell^p \ (1 \le p < \infty) \\ \mathcal{B}(\mathcal{H}) &\longleftrightarrow \ell^\infty \end{aligned}$$

ここで，ℓ^p $(1 \le p \le \infty)$ はよく知られた複素数列のなすバナッハ空間であり，c_0 は 0 に収束する数列からなる ℓ^∞ の部分空間である．実際，$A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ のとき，$(\mu_n(A)) \in c_0$ であり，$A \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow (\mu_n(A)) \in \ell^p$．さらに，定理 4.2.11 の双対関係は，$\ell^p \cong (\ell^q)^*$ $(1 < p < \infty,\ 1/p + 1/q = 1)$, $\ell^1 \cong (c_0)^*$, $\ell^\infty \cong (\ell^1)^*$ に対応する．したがって，シャッテン・クラス $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ は非可換 ℓ^p-空間とみなせる．測度空間上の L^p-空間の非可換拡張として，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ より一般のフォン・ノイマン環に対しても，それに付随した非可換 L^p-空間がいくつかの方法で考案されている．

演習問題 4

1. 命題 4.1.2 の (i) $\Longrightarrow$ (iv) を次の方法で直接に証明せよ：$\overline{\operatorname{ran} A}$ の CONS $\{e_n\}$ をとり，P_n を $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ への射影とすると $\|P_nA - A\| \to 0$.

2. 命題 4.1.10 を証明せよ．

3. $A \in \mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ ならば，有限個の $\{x_k\}_{k=1}^n, \{y_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{H}$ が存在して $A = \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k$ と表される．このとき，$\{x_k\}, \{y_k\}$ の一方を ONS にとれる．これらのことを定理 4.1.15 を使わずに直接に示せ．

4. A をコンパクト正規作用素とし，$A = \sum_n \lambda_n x_n \otimes x_n$ を A の固有値展開とする．f が $\{\lambda_n\} \cup \{0\}$ (注意 4.1.14) 上の連続関数のとき，$f(A)$ (定義 3.2.3) は

$$f(A) = \sum_n f(\lambda_n) x_n \otimes x_n$$

で与えられることを示せ．さらに，$f(0) = 0$ ならば $f(A) \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ を示せ．

5. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする．ある $q > 0$ で $|A|^q \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ ならば，すべての $p > 0$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $|A|^p, A^n \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ となることを示せ．

6. $\dim\mathcal{H} = \aleph_0$ とし，A, B を $\mathcal{H}$ 上のコンパクト正規作用素とする．次の条件について，(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) を証明し，また (i) $\Longrightarrow$ (iii) が不成立であることを示せ：
(i) 重複度もこめて $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma(B) \setminus \{0\}$，すなわち，任意の $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して $\dim\ker(\lambda I - A) = \dim\ker(\lambda I - B)$;
(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|UAU^* - B\| < \varepsilon$ となるユニタリー作用素 U が存在する；
(iii) $UAU^* = B$ となるユニタリー作用素 U が存在する．

7. 定理 4.1.17 のミニ・マックス原理と類似した次の公式を証明せよ．
(1) $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, $A \geq 0$ のとき

$$\mu_n(A) = \max\left\{ \min_{x \in \mathcal{M},\, \|x\|=1} \langle Ax, x\rangle : \mathcal{M} \subset \mathcal{H} \text{ 部分空間}, \dim\mathcal{M} = n \right\}.$$

(2) $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ のとき

$$\mu_n(A) = \max\left\{ \min_{x \in \mathcal{M},\, \|x\|=1} \|Ax\| : \mathcal{M} \subset \mathcal{H} \text{ 部分空間}, \dim\mathcal{M} = n \right\}.$$

8. $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ のとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|\mu_n(A) - \mu_n(B)| \leq \|A - B\|$$

を示せ．

9. $x, y \in \mathcal{H}$ のとき，$\mathrm{tr}(x \otimes y) = \langle x, y\rangle$, $\|x \otimes y\|_p = \|x\|\,\|y\|$ $(1 \leq p < \infty)$ を示せ．

10. $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ かつ $A \notin \bigcup_{1<p<\infty} \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ である A の例を与えよ．また，$A \in \bigcap_{1<p<\infty} \mathcal{C}_p(\mathcal{A})$ かつ $A \notin \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ である A の例も与えよ．

11. 命題 4.2.8 を一般化して次を証明せよ：$1 \leq p, q, r \leq \infty$, $1/r = 1/p + 1/q$ のとき，$A \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{C}_q(\mathcal{H})$ ならば $AB \in \mathcal{C}_r(\mathcal{H})$ で $\|AB\|_r \leq \|A\|_p \|B\|_q$. ただし $(\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty) = (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ とする．

12. 定理 4.2.11 の (3) を証明せよ.

13. $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ をヒルベルト空間とする.
(1) $x \in \mathcal{H}$, $y \in \mathcal{K}$ に対して, $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ 上の共役双線型な汎関数 $x \otimes y$ を $(x \otimes y)(u, v) = \langle x, u\rangle\langle y, v\rangle$ と定める. $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ 上の共役双線型な汎関数のなす線型空間において $\{x \otimes y : x \in \mathcal{H},\ y \in \mathcal{K}\}$ の 1 次結合の全体を $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$ で表し, $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ の代数的テンソル積という. (もっと抽象的に, $\{x \otimes y : x \in \mathcal{H},\ y \in \mathcal{K}\}$ の 1 次結合の全体に, $\alpha(x \otimes y) = (\alpha x) \otimes y = x \otimes (\alpha y)$, $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$, $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$ の同一視を入れた線型空間を $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$ としても同じである.) $\varphi = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \otimes y_i$, $\psi = \sum_{j=1}^n \beta_j u_j \otimes v_j \in \mathcal{H} \odot \mathcal{K}$ に対して

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta}_j \langle x_i, u_j\rangle\langle y_i, v_j\rangle$$

と定めると, $\langle \varphi, \psi\rangle$ が φ, ψ の表し方によらず定まり, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$ の内積であることを示せ. この内積空間 $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$ の完備化ヒルベルト空間を $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ で表し, $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ の**テンソル積ヒルベルト空間**という.
(2) $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ をそれぞれ $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ の CONS とすると, $\{e_\lambda \otimes f_\gamma : \lambda \in \Lambda,\ \gamma \in \Gamma\}$ が $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ の CONS であることを示せ.
(3) $\overline{\mathcal{H}} = \{\overline{x} : x \in \mathcal{H}\}$ として, 和 $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}$, スカラー倍 $\alpha\overline{x} = \overline{\overline{\alpha}x}$, および内積 $\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle = \langle y, x\rangle$ を定めると, $\overline{\mathcal{H}}$ がヒルベルト空間 ($\mathcal{H}$ の**共役ヒルベルト空間**と呼ぶ) になること示せ.
(4) 等距離同型写像 $\Phi : \mathcal{H} \otimes \overline{\mathcal{H}} \to \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ で, すべての $x, y \in \mathcal{H}$ に対して $\Phi(x \otimes \overline{y}) = x \otimes y$ (シャッテン形式) を満たすものが存在することを示せ. (これより, ヒルベルト空間として $\mathcal{C}_2(\mathcal{H}) \cong \mathcal{H} \otimes \overline{\mathcal{H}}$ となる.)

14. 定理 4.2.11 とは別に, $1 \le p < \infty$ のとき $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ のノルム $\|\cdot\|_p$ の完備性を直接に証明せよ.

15. $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して $\pi(X)A = XA$ $(A \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H}))$ と定めるとき, 次を示せ.
(1) $\pi(X)$ はヒルベルト空間 $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ 上の有界作用素で $\|\pi(X)\| = \|X\|$.
(2) $\pi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{C}_2(\mathcal{H}))$ は $*$-準同型.

16. $L^2([0,1])$ 上の**ヴォルテラ積分作用素** A を

$$(Af)(s) = \int_0^s f(t)dt, \qquad f \in L^2([0,1])$$

と定める．つまり A は積分核 $K(s,t) = 1\ (s \geq t),\ 0\ (s < t)$ をもつ積分作用素である．このとき $\sigma_{\mathrm{p}}(A) = \emptyset$ を示せ．(よって A は $\sigma(A) = \{0\}$ であるコンパクト作用素.)

第 5 章

作用素単調関数と作用素平均

作用素の研究には，作用素のどんな性質に着目するかでいくつかの観点・方法が考えられる．例えば，代数的な構造を重視する観点があり，またノルム構造や位相的な性質に着目する観点もある．さらに，複素解析的な方法も有力である．もう 1 つの重要な方法は，作用素の順序関係に基づくものである．ここでの順序とは，正定値性から定まる自己共役作用素の間の順序 (定義 2.1.13) のことである．これらの観点は当然のことに密接に関連しており，作用素論の面白味もその辺にあるといってよい．さて，作用素の順序に関しては，レーヴナーによる作用素単調関数の理論が有名であり，作用素不等式の研究などで重要な役割を果たしている．さらに，作用素単調関数と関係して，久保-安藤による作用素平均の理論がある．作用素平均は順序を保つ正作用素の間の 2 項演算であるが，直列・並列といった電気回路の接続を数学的に抽象化したものと見ることもできる．この章では，作用素単調関数の理論 (5.1 節) と作用素平均の理論 (5.2 節) を解説する．

5.1　作用素単調と作用素凸

作用素単調関数と作用素凸関数の定義を述べる前に，次の有名な不等式を証明しよう．

定理 5.1.1 (レーヴナー-ハインツの不等式)　$A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について，$0 \leq A \leq B$ ならば，任意の $0 \leq p \leq 1$ に対して $A^p \leq B^p$. ただし，$A^0 = I$ と規約する．

証明　以下の証明はペダーセンによる．$A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $0 \le A \le B$ とする．まず A, B は可逆として

$$\Delta = \{p \in \mathbb{R} : A^p \le B^p\}$$

とおく．A^p, B^p が p についてノルム連続だから，Δ は閉集合である．また $0, 1 \in \Delta$ は明らか．よって $[0,1] \subset \Delta$ を示すには，$p, q \in \Delta \Longrightarrow (p+q)/2 \in \Delta$ をいえば十分である．$A^p \le B^p$, $A^q \le B^q$ とする．$A^p \le B^p$ の両側から $B^{-p/2}$ を掛けて $B^{-p/2}A^pB^{-p/2} \le I$, i.e. $(A^{p/2}B^{-p/2})^*(A^{p/2}B^{-p/2}) \le I$. よって $\|A^{p/2}B^{-p/2}\| \le 1$. 同じく $\|A^{q/2}B^{-q/2}\| \le 1$. したがって

$$\begin{aligned}
1 &\ge \|(A^{p/2}B^{-p/2})^*(A^{q/2}B^{-q/2})\| \\
&= \|B^{-p/2}A^{(p+q)/2}B^{-q/2}\| \\
&\ge r(B^{-p/2}A^{(p+q)/2}B^{-q/2}) \\
&= r(B^{(q-p)/4}B^{-(p+q)/4}A^{(p+q)/2}B^{-q/2}) \\
&= r(B^{-(p+q)/4}A^{(p+q)/2}B^{-q/2}B^{(q-p)/4}) \\
&= r(B^{-(p+q)/4}A^{(p+q)/2}B^{-(p+q)/4}) \\
&= \|B^{-(p+q)/4}A^{(p+q)/2}B^{-(p+q)/4}\|.
\end{aligned}$$

上の計算で (3.1), (3.2), 命題 3.1.13 を使った．ゆえに

$$B^{-(p+q)/4}A^{(p+q)/2}B^{-(p+q)/4} \le I$$

であるから，$A^{(p+q)/2} \le B^{(p+q)/2}$, i.e. $(p+q)/2 \in \Delta$. これで，A, B が可逆のときに結論が示せた．

一般に $0 \le A \le B$ のとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $0 \le A + \varepsilon I \le B + \varepsilon I$ で，$A + \varepsilon I, B + \varepsilon I$ が可逆であるから

$$(A + \varepsilon I)^p \le (B + \varepsilon I)^p, \qquad 0 \le p \le 1.$$

$\varepsilon \downarrow 0$ のとき $(A + \varepsilon I)^p \to A^p$, $(B + \varepsilon I)^p \to B^p$ (ノルム収束) だから，$A^p \le B^p$ $(0 \le p \le 1)$ が従う．■

次の例から，$p > 1$ では上の不等式が成立しないことがわかる．

例 5.1.2 2×2 行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

とする．$0 \le A \le B$ は簡単に確かめられる．$p > 0$ のとき，A は射影行列だから $A^p = A$. よって

$$B^p - A^p = \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2}\right)^p - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \left(\frac{3}{4}\right)^p - \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

この行列式は

$$\begin{aligned} \det(B^p - A^p) &= \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^p - \frac{1}{2}\right\}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^p - \frac{1}{2}\right\} - \frac{1}{4} \\ &= \left(\frac{3}{8}\right)^p \left(3^p - \frac{2^p + 4^p}{2}\right). \end{aligned}$$

$A^p \le B^p$ とすると，$\det(B^p - A^p) \ge 0$ だから，$\frac{2^p+4^p}{2} \le 3^p$ でなければならない．しかし，$p > 1$ のとき，t^p の狭義凸性より $\frac{2^p+4^p}{2} > (\frac{2+4}{2})^p = 3^p$. これより，$p > 1$ のとき $A^p \le B^p$ は不成立.

定義 5.1.3 J は $\mathbb{R}$ の区間 (閉区間でも開区間でもよい) とし，$f : J \to \mathbb{R}$ は連続関数とする.

(1) f が**作用素単調関数**とは，$\sigma(A), \sigma(B) \subset J$ である自己共役な $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について

$$A \le B \Longrightarrow f(A) \le f(B) \tag{5.1}$$

が成立するときをいう．ここで，$f(A)$ は A の連続関数カルキュラス (定義 3.2.4) とする.

(2) f が**作用素凸関数**とは，$\sigma(A), \sigma(B) \subset J$ である任意の自己共役な $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$f\left(\frac{1}{2}(A+B)\right) \le \frac{1}{2}\Big\{f(A) + f(B)\Big\} \tag{5.2}$$

が成立するときをいう．このとき，f の連続性から

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) \le \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B), \qquad 0 \le \lambda \le 1$$

が成立する．また，(5.2) で不等号が逆向きのとき，すなわち $-f$ が作用素凸のとき，f は**作用素凹関数**という．

上の定義 (2) で，$\sigma(A), \sigma(B) \subset J$ のとき，$[\alpha, \beta] \subset J$ がとれて $\alpha I \le A, B \le \beta I$ となるから，任意の $0 \le \lambda \le 1$ に対して $\alpha I \le \lambda A + (1-\lambda)B \le \beta I$. よって $\sigma(\lambda A + (1-\lambda)B)) \subset J$ であることに注意する．

作用素単調関数 f は通常の意味で単調増加である．これは，$A = aI, B = bI$ $(a, b \in J)$ とおけば $f(A) = f(a)I$, $f(B) = f(b)I$ となることからわかる．同様に作用素凸関数は通常の意味で凸関数である．しかし，例 5.1.2 (また例 5.1.12) が示すように，これらの逆は必ずしも成立しない．

補題 5.1.4　$\Omega \subset \mathbb{C}$ は有界閉集合とし，$f : \Omega \to \mathbb{C}$ は連続とする．ネット $\{A_\gamma\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について，A_γ, A がすべて正規で，$\sigma(A_\gamma), \sigma(A) \subset \Omega$, $A_\gamma \xrightarrow{\text{SOT}} A$ ならば，$f(A_\gamma) \xrightarrow{\text{SOT}} f(A)$.

証明　任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned} ||A_\gamma^* x - A^* x||^2 &= ||A_\gamma^* x||^2 - \langle A_\gamma^* x, A^* x\rangle - \langle A^* x, A_\gamma^* x\rangle + ||A^* x||^2 \\ &= ||A_\gamma x||^2 - \langle x, A_\gamma A^* x\rangle - \langle A_\gamma A^* x, x\rangle + ||Ax||^2 \\ &\to ||Ax||^2 - \langle x, AA^* x\rangle - \langle AA^* x, x\rangle + ||Ax||^2 = 0. \end{aligned}$$

よって $A_\gamma^* \xrightarrow{\text{SOT}} A^*$. また

$$||A_\gamma|| = r(A_\gamma) \le \sup_{\zeta \in \Omega} |\zeta| < +\infty$$

だから $\{A_\gamma\}$ は一様有界．したがって，任意の $m, n \ge 0$ に対して $A_\gamma^m A_\gamma^{*n} \xrightarrow{\text{SOT}} A^m A^{*n}$ が容易に示せる．これより，$\zeta, \overline{\zeta}$ の任意の多項式 $p(\zeta)$ に対して $p(A_\gamma) \xrightarrow{\text{SOT}} p(A)$ となる．$f \in C(\Omega)$ とすると，ストーン-ワイエルシュトラスの定理より，$\zeta, \overline{\zeta}$ の多項式の列 $\{p_k\}$ が存在して $||p_k - f|| \to 0$ ($C(\Omega)$ のノルムで収束)．このとき

$$\begin{aligned} &||f(A_\gamma)x - f(A)x|| \\ &\quad \le ||f(A_\gamma)x - p_k(A_\gamma)x|| + ||p_k(A_\gamma)x - p_k(A)x|| \\ &\qquad + ||p_k(A)x - f(A)x|| \\ &\quad \le 2||p_k - f||\,||x|| + ||p_k(A_\gamma)x - p_k(A)x|| \end{aligned}$$

であるから，$f(A_\gamma) \xrightarrow{\text{SOT}} f(A)$ が従う． ■

特に，$f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ が連続とし，$A_\gamma = A_\gamma^*$, $\sigma(A_\gamma) \subset [\alpha,\beta]$, $A_\gamma \xrightarrow{\text{SOT}} A$ とする．このとき，$A = A^*$, $\sigma(A) \subset [\alpha,\beta]$ が自動的に満たされるので，$f(A_\gamma) \xrightarrow{\text{SOT}} f(A)$ が成立する．

命題 5.1.5 J は区間，$f:J \to \mathbb{R}$ は連続とする．

(1) $\sigma(A), \sigma(B) \subset J$ である任意のエルミート行列 A, B に対して (5.1) が成立するならば，f は作用素単調である．

(2) $\sigma(A), \sigma(B) \subset J$ である任意のエルミート行列 A, B に対して (5.2) が成立するならば，f は作用素凸である．

証明 $\mathcal{H}$ の CONS $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとり，$\mathcal{F} = \{K \subset \Lambda : \text{有限集合}\}$ を包含関係の順序で有向集合とする．$K \in \mathcal{F}$ に対して $P_K = \sum_{\lambda\in K} e_\lambda \otimes e_\lambda$ (有限階の射影) とおくと，$\{P_K\}_{K\in\mathcal{F}}$ は I に強収束する．

(1) $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が自己共役で，$\sigma(A), \sigma(B) \subset J$, $A \le B$ とする．このとき，$\alpha I \le A, B \le \beta I$ となる有限区間 $[\alpha,\beta] \subset J$ がとれる．

$$A_K = P_K A P_K + \alpha(I - P_K), \quad B_K = P_K B P_K + \alpha(I - P_K)$$

とおくと，$A_K \xrightarrow{\text{SOT}} A$, $B_K \xrightarrow{\text{SOT}} B$ となる．$\alpha I \le A_K, B_K \le \beta I$ より $\sigma(A_K), \sigma(B_K) \subset [\alpha,\beta]$. よって上の補題より $f(A_K) \xrightarrow{\text{SOT}} f(A)$, $f(B_K) \xrightarrow{\text{SOT}} f(B)$. ところで

$$f(A_K) = f(P_K A P_K) + f(\alpha)(I - P_K),$$

$$f(B_K) = f(P_K B P_K) + f(\alpha)(I - P_K).$$

ただし，$f(P_K A P_K)$ は $P_K\mathcal{H}$ 上の作用素として定義する．$P_K\mathcal{H}$ 上の作用素 $P_K A P_K, P_K B P_K$ はエルミート行列に表現でき，$\sigma(P_K A P_K), \sigma(P_K B P_K) \subset [\alpha,\beta]$, $P_K A P_K \le P_K B P_K$ である．したがって $f(P_K A P_K) \le f(P_K B P_K)$ となり $f(A_K) \le f(B_K)$. 極限をとって $f(A) \le f(B)$.

(2) も同様に示せる． ■

補題 5.1.6 (1) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が正規で $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ がユニタリーならば，任意の $f \in C(\sigma(A))$ に対して $f(U^*AU) = U^* f(A) U$.

(2) 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $f \in C([0, ||A||^2])$ に対して $Af(A^*A) = f(AA^*)A$.

証明　(1) $B = U^*AU$ とおくと，B も正規であり $\sigma(B) = \sigma(A)$. 任意の $m, n \geq 0$ に対して $B^m B^{*n} = U^* A^m A^{*n} U$. よって $p(\zeta)$ が $\zeta, \overline{\zeta}$ の多項式のとき $p(B) = U^* p(A) U$. 任意の $f \in C(\sigma(A))$ は $\zeta, \overline{\zeta}$ の多項式で一様近似できるから，$f(B) = U^* f(A) U$ が得られる.

(2) $\sigma(A^*A), \sigma(AA^*) \subset [0, ||A||^2]$ だから，$f(A^*A), f(AA^*)$ は定義できる. 任意の $n \geq 0$ に対して $A(A^*A)^n = (AA^*)^n A$. よって $p(t)$ が多項式のとき $Ap(A^*A) = p(AA^*)A$. 任意の $f \in C([0, ||A||^2])$ は多項式で一様近似できるから，$Af(A^*A) = f(AA^*)A$ が成立する.　■

以下に，ハンセン-ペダーセンの方法に基づいて，作用素凸関数と作用素単調関数のいくつかの特徴づけを与えよう.

$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ を $\mathcal{H}$ とそれ自身の直和ヒルベルト空間とし，$\mathbf{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ とする. $x, y \in \mathcal{H}$ に対して

$$\mathbf{A}(x, 0) = (A_{11}x, A_{21}x), \quad \mathbf{A}(0, y) = (A_{12}y, A_{22}y)$$

と定めると，$A_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $(i, j = 1, 2)$ となる. $(x', y') = \mathbf{A}(x, y)$ とおくと

$$(x', y') = \mathbf{A}(x, 0) + \mathbf{A}(0, y) = (A_{11}x + A_{12}y, A_{21}x + A_{22}y)$$

だから，行列の記法を使って

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

と表される. これより，任意の $\mathbf{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ は 2×2 作用素行列により

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad A_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

と一意的に書くことができる. このとき，$\mathbf{A}^*$ と $\mathbf{AB}$ $\left(\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}\right)$ は通常の行列演算のように

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

と表される. $\mathbf{A} \geq 0$ ならば $A_{11}, A_{22} \geq 0$ であることに注意する. 以下，この 2×2 作用素行列の表示をくり返し用いる.

定理 5.1.7 $0 < \alpha \le \infty$ のとき，連続関数 $f : [0, \alpha) \to \mathbb{R}$ について次は同値：

(i) f が作用素凸で $f(0) \le 0$;

(ii) $\sigma(A) \subset [0, \alpha)$ である $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ と $\|C\| \le 1$ である $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，$f(C^*AC) \le C^*f(A)C$;

(iii) $\sigma(A), \sigma(B) \subset [0, \alpha)$ である $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ と $C^*C + D^*D \le 1$ である $C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，$f(C^*AC + D^*BD) \le C^*f(A)C + D^*f(B)D$;

(iv) $\sigma(A) \subset [0, \alpha)$ である $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ と射影作用素 $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，$f(PAP) \le Pf(A)P$;

(v) $(0, \alpha)$ 上の関数 $f \mapsto f(t)/t$ が作用素単調.

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii). (ii) の A, C に対して，$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 上で

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} C & (I - CC^*)^{1/2} \\ (I - C^*C)^{1/2} & -C^* \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} C & -(I - CC^*)^{1/2} \\ (I - C^*C)^{1/2} & -C^* \end{bmatrix}$$

とおく．補題 5.1.6 (2) より $C(I - C^*C)^{1/2} = (I - CC^*)^{1/2}C$ だから，(5.3) により計算すると，$\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}}$. よって $\mathbf{U}$ はユニタリーとなる．同じく $\mathbf{V}$ もユニタリー．$\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}$ と $\mathbf{V}^*\mathbf{A}\mathbf{V}$ を行列計算すると

$$\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} C^*AC & C^*A(I - CC^*)^{1/2} \\ (I - CC^*)^{1/2}AC & (I - CC^*)^{1/2}A(I - CC^*)^{1/2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}^*\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} C^*AC & -C^*A(I - CC^*)^{1/2} \\ -(I - CC^*)^{1/2}AC & (I - CC^*)^{1/2}A(I - CC^*)^{1/2} \end{bmatrix}.$$

したがって，(i) の仮定と補題 5.1.6 (1) より

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} f(C^*AC) & 0 \\ 0 & f((I - CC^*)^{1/2}A(I - CC^*)^{1/2}) \end{bmatrix} \\
&\quad = f\left(\begin{bmatrix} C^*AC & 0 \\ 0 & (I - CC^*)^{1/2}A(I - CC^*)^{1/2} \end{bmatrix}\right) \\
&\quad = f\left(\frac{1}{2}\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} + \frac{1}{2}\mathbf{V}^*\mathbf{A}\mathbf{V}\right) \le \frac{1}{2}f(\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}) + \frac{1}{2}f(\mathbf{V}^*\mathbf{A}\mathbf{V})
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{U}^* \begin{bmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & f(0)I \end{bmatrix} \mathbf{U} + \frac{1}{2}\mathbf{V}^* \begin{bmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & f(0)I \end{bmatrix} \mathbf{V}$$
$$\le \frac{1}{2}\mathbf{U}^* \begin{bmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{U} + \frac{1}{2}\mathbf{V}^* \begin{bmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}$$
$$= \begin{bmatrix} C^*f(A)C & 0 \\ 0 & (I-CC^*)^{1/2}f(A)(I-CC^*)^{1/2} \end{bmatrix}.$$

上の (1,1) 成分を比較して $f(C^*AC) \le C^*f(A)C$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). (iii) の A, B, C, D に対して

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ D & 0 \end{bmatrix}$$

とおく.

$$\mathbf{Y}^*\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} C^*C + D^*D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \le I_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$$

だから $\|\mathbf{Y}\| \le 1$. また $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$ であり，$\lambda I_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} - \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \lambda I - A & 0 \\ 0 & \lambda I - B \end{bmatrix}$ だから，$\sigma(\mathbf{X}) = \sigma(A) \cup \sigma(B) \subset [0, \alpha)$. さらに

$$\mathbf{Y}^*\mathbf{X}\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} C^*AC + D^*BD & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって

$$\begin{bmatrix} f(C^*AC + D^*BD) & 0 \\ 0 & f(0)I \end{bmatrix} = f(\mathbf{Y}^*\mathbf{X}\mathbf{Y}) \le \mathbf{Y}^* f(\mathbf{X}) \mathbf{Y}$$
$$= \begin{bmatrix} C^*f(A)C + D^*f(B)D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

したがって $f(C^*AC + D^*BD) \le C^*f(A)C + D^*f(B)D$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). $C = P$, $D = 0$ とすればよい.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が自己共役で $\sigma(A), \sigma(B) \subset [0, \alpha)$ とし，$0 \le \lambda \le 1$ とする. $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 上で

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \lambda^{1/2}I & -(1-\lambda)^{1/2}I \\ (1-\lambda)^{1/2}I & \lambda^{1/2}I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと，$\mathbf{X}$ は自己共役で $\sigma(\mathbf{X}) \subset [0,\alpha)$, $\mathbf{U}$ はユニタリー，$\mathbf{P}$ は射影となる．行列計算すると

$$\mathbf{PU^*XUP} = \begin{bmatrix} \lambda A + (1-\lambda)B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f(\lambda A + (1-\lambda)B) & 0 \\ 0 & f(0)I \end{bmatrix} &= f(\mathbf{PU^*XUP}) \\ &\le \mathbf{P}f(\mathbf{U^*XU})\mathbf{P} = \mathbf{PU^*}f(\mathbf{X})\mathbf{UP} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

したがって $f(\lambda A + (1-\lambda)B) \le \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B)$ かつ $f(0) \le 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (v). $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が自己共役で $\sigma(A), \sigma(B) \subset (0,\alpha)$, $A \le B$ とする．このとき A, B は可逆である．$C = B^{-1/2}A^{1/2}$ とおくと，$CC^* = B^{-1/2}AB^{-1/2} \le I$ だから $\|C\| \le 1$. $A = C^*BC$ だから

$$f(A) \le C^*f(B)C = A^{1/2}B^{-1/2}f(B)B^{-1/2}A^{1/2}.$$

よって $A^{-1/2}f(A)A^{-1/2} \le B^{-1/2}f(B)B^{-1/2}$ となり $A^{-1}f(A) \le B^{-1}f(B)$. ゆえに $(0,\alpha)$ 上の関数 $t^{-1}f(t)$ は作用素単調である．

(v) $\Longrightarrow$ (iv). A, P を (iv) のようにとる．$A+\varepsilon I$ に対する結論の不等式から $\varepsilon \downarrow 0$ とできるので，A は可逆としてよい．$\|A\| < \alpha$ より，$\|(1+\varepsilon)A\| < \alpha$ となる $\varepsilon > 0$ がとれる．$P+\varepsilon I \le (1+\varepsilon)I$ だから $A^{1/2}(P+\varepsilon I)A^{1/2} \le (1+\varepsilon)A$. (v) より

$$A^{-1/2}(P+\varepsilon I)^{-1}A^{-1/2}f(A^{1/2}(P+\varepsilon I)A^{1/2}) \le (1+\varepsilon)^{-1}A^{-1}f((1+\varepsilon)A).$$

この両辺に $PA(P+\varepsilon I)A^{1/2}$ と $A^{1/2}(P+\varepsilon I)AP$ を左右から掛けて

$$\begin{aligned} &PA^{1/2}f(A^{1/2}(P+\varepsilon I)A^{1/2})A^{1/2}(P+\varepsilon I)AP \\ &\quad \le (1+\varepsilon)^{-1}PA(P+\varepsilon I)f((1+\varepsilon)A)(P+\varepsilon I)AP. \end{aligned}$$

$\varepsilon \downarrow 0$ として

$$PA^{1/2}f(A^{1/2}PA^{1/2})A^{1/2}PAP \le PAPf(A)PAP.$$

補題 5.1.6 (2) より $f(A^{1/2}PA^{1/2})A^{1/2}P = A^{1/2}Pf(PAP)$ だから

$$PAPf(PAP)PAP \le PAPf(A)PAP.$$

よって任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$\langle \{Pf(PAP)P\}PAPx, PAPx\rangle \le \langle \{Pf(A)P\}PAPx, PAPx\rangle.$$

$A \ge \delta I$ となる $\delta > 0$ をとると，$PAP \ge \delta P$. これより，$PAP|P\mathcal{H}$ は可逆となり，$\operatorname{ran} PAP = \operatorname{ran} P$ がわかる．したがって

$$\langle Pf(PAP)Px, x\rangle \le \langle Pf(A)Px, x\rangle.$$

ゆえに $Pf(PAP)P \le Pf(A)P$. $f(t)/t$ が $(0,\alpha)$ 上で単調増加だから，$0 < \beta < \alpha$ をとると $f(t)/t \le f(\beta)/\beta$ $(0 < t \le \beta)$. $f(t) \le (f(\beta)/\beta)t$ で $t \downarrow 0$ として $f(0) \le 0$. $\mathcal{H} = P\mathcal{H} \oplus (I-P)\mathcal{H}$ と直交分解して考えると

$$\begin{aligned} f(PAP) &= Pf(PAP)P + f(0)(I-P) \\ &\le Pf(PAP)P \le Pf(A)P. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

定理 5.1.8　定理 5.1.7 で $\alpha = \infty$, $f(t) \le 0$ $(0 \le t < \infty)$ のとき，条件 (i)–(v) は次と同値：

(vi) $-f$ が作用素単調.

証明　(vi) $\Longrightarrow$ (ii). A, C を (ii) のようにとり，上の証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) のように $\mathbf{A}, \mathbf{U}$ を定める．$\varepsilon, \mu > 0$ に対して $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} C^*AC + \varepsilon I & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix}$ とおく．$R = (I - CC^*)^{1/2}A(I - CC^*)^{1/2}$, $S = C^*A(I - CC^*)^{1/2}$ とおくと，$\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} C^*AC & S \\ S^* & R \end{bmatrix}$ だから $\mathbf{B} - \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \varepsilon I & -S \\ -S^* & \mu I - R \end{bmatrix}$. よって

$$\begin{aligned} &\left\langle (\mathbf{B} - \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} \varepsilon x - Sy \\ -S^*x + \mu y - Ry \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \varepsilon||x||^2 - 2\mathrm{Re}\langle x, Sy\rangle + \mu||y||^2 - \langle Ry, y\rangle \\ &\ge \varepsilon||x||^2 - 2||S||\,||x||\,||y|| + (\mu - ||R||)||y||^2 \\ &= \left(\sqrt{\varepsilon}||x|| - \frac{||S||}{\sqrt{\varepsilon}}||y||\right)^2 + \left(\mu - ||R|| - \frac{||S||^2}{\varepsilon}\right)||y||^2. \end{aligned}$$

ゆえに，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，十分大きい $\mu > 0$ をとると $\mathbf{B} - \mathbf{U}^*\mathbf{AU} \geq 0$, i.e. $\mathbf{U}^*\mathbf{AU} \leq \mathbf{B}$. このとき (vi) より

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} f(C^*AC + \varepsilon I) & 0 \\ 0 & f(\mu)I \end{bmatrix} \\
&\qquad = f(\mathbf{B}) \leq f(\mathbf{U}^*\mathbf{AU}) = \mathbf{U}^* \begin{bmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & f(0)I \end{bmatrix} \mathbf{U} \\
&\qquad \leq \mathbf{U}^* \begin{bmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} C^*f(A)C & * \\ * & * \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

したがって $f(C^*AC+\varepsilon I) \leq C^*f(A)C$. $\varepsilon \downarrow 0$ として $f(C^*AC) \leq C^*f(A)C$.

(i) $\Longrightarrow$ (vi). $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $0 \leq A \leq B$ とする．$0 < \lambda < 1$ のとき，$\lambda B = \lambda A + (1-\lambda)\lambda(1-\lambda)^{-1}(B-A)$ だから

$$f(\lambda B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda)f(\lambda(1-\lambda)^{-1}(B-A)).$$

$f \leq 0$ より $f(\lambda B) \leq \lambda f(A)$. $\lambda \uparrow 1$ として $f(B) \leq f(A)$ を得る．よって $-f$ は作用素単調である． ■

系 5.1.9 $[0, \infty)$ 上の連続関数 $f \geq 0$ について，f の作用素単調性と作用素凹性は同値である．

補題 5.1.10 $(0, \infty)$ で，$t \mapsto t^{-1}$ は作用素凸であり，$t \mapsto -t^{-1}$ は作用素単調である．

証明 $\{(1+t)/2\}^{-1} \leq (1+t^{-1})/2$ $(t > 0)$ だから，$X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $X \geq 0$ が可逆のとき

$$\left\{\frac{1}{2}(I+X)\right\}^{-1} \leq \frac{1}{2}(I+X^{-1}).$$

$A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A, B \geq 0$ とし，A, B が可逆とすると，$X = A^{-1/2}BA^{-1/2}$ に上の不等式を適用して

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{1}{2}(A+B)\right\}^{-1} &= \left\{\frac{1}{2}A^{1/2}(I + A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}\right\}^{-1} \\
&= A^{-1/2}\left\{\frac{1}{2}(I + A^{-1/2}BA^{-1/2})\right\}^{-1} A^{-1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\le \frac{1}{2}A^{-1/2}\{I+(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{-1}\}A^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2}(A^{-1}+B^{-1}). \end{aligned}$$

よって t^{-1} は $(0,\infty)$ で作用素凸である．後半は演習問題 2.3 (5) に他ならない． ■

系 5.1.11 f が $(0,\infty)$ 上の連続関数で $f>0$ とするとき，次の条件について，(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) が成立：

(i) f が作用素単調；

(ii) $t/f(t)$ が作用素単調；

(iii) f が作用素凹；

(iv) $1/f(t)$ が作用素凸.

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii). 任意の $\varepsilon>0$ に対して，$f_\varepsilon(t)=f(t+\varepsilon)$ は $[0,\infty)$ で作用素単調であり，$-f_\varepsilon<0$. $-f_\varepsilon$ に定理 5.1.8 が適用できて，$-f_\varepsilon(t)/t$ が $(0,\infty)$ で作用素単調. よって前補題より $t/f_\varepsilon(t)=-(-f_\varepsilon(t)/t)^{-1}$ が $(0,\infty)$ で作用素単調. $\varepsilon\downarrow 0$ として $t/f(t)$ が作用素単調となる.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). 任意の $\varepsilon>0$ に対して，$(t+\varepsilon)/f(t+\varepsilon)$ は $[0,\infty)$ で作用素単調で $-(t+\varepsilon)/f(t+\varepsilon)<0$ だから，定理 5.1.8 より $-(t+\varepsilon)/tf(t+\varepsilon)$ が $(0,\infty)$ で作用素単調である．よって $tf(t+\varepsilon)/(t+\varepsilon)$ が $(0,\infty)$ で作用素単調. $\varepsilon\downarrow 0$ として (i) を得る.

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii). f_ε を上のように定めると，系 5.1.9 より

$$\begin{aligned} \text{(i)} &\Longleftrightarrow \text{任意の } \varepsilon>0 \text{ に対して } f_\varepsilon \text{ が } [0,\infty) \text{ で作用素単調} \\ &\Longleftrightarrow \text{任意の } \varepsilon>0 \text{ に対して } f_\varepsilon \text{ が } [0,\infty) \text{ で作用素凹} \\ &\Longleftrightarrow \text{(iii)}. \end{aligned}$$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). $g(t)=1/f(t)$ とおく．$A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A,B\ge 0$ が可逆とすると，(iii) より

$$f\left(\frac{1}{2}(A+B)\right)\ge\frac{1}{2}\left\{f(A)+f(B)\right\}.$$

前補題より

$$g\left(\frac{1}{2}(A+B)\right) = f\left(\frac{1}{2}(A+B)\right)^{-1}\le\left\{\frac{1}{2}(f(A)+f(B))\right\}^{-1}$$

$$\leq \quad \frac{1}{2}\{f(A)^{-1} + f(B)^{-1}\} = \frac{1}{2}\{g(A) + g(B)\}.$$

よって g は作用素凸である. ■

次に，作用素単調関数と作用素凸関数の基本的な例を挙げておく.

例 5.1.12 (1) $\alpha \geq 0$ のとき，$f(t) = \alpha t + \beta$ は $\mathbb{R}$ 全体で作用素単調.

(2) $c \notin (\alpha, \beta)$ のとき，$f(t) = (c-t)^{-1}$ は (α, β) で作用素単調.

(3) $0 \leq p \leq 1$ のとき，$f(t) = t^p$ は $[0, \infty)$ で作用素単調かつ作用素凹. さらに

$$\{p \in \mathbb{R} : t \mapsto t^p \text{ が } (0, \infty) \text{ で作用素単調 }\} = [0, 1].$$

(4) $1 \leq p \leq 2$ のとき $f(t) = t^p$ は $[0, \infty)$ で作用素凸. さらに

$$\{p \in \mathbb{R} : t \mapsto t^p \text{ が } (0, \infty) \text{ で作用素凸 }\} = [-1, 0] \cup [1, 2].$$

(5)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ 1, & t = 1 \\ \dfrac{t-1}{\log t}, & t \neq 0, 1 \end{cases}$$

は $[0, \infty)$ で作用素単調.

(6) $f(t) = \log t$ は $(0, \infty)$ で作用素単調かつ作用素凹.

(7) $f(t) = t \log t$ は $[0, \infty)$ で作用素凸. ただし，$0 \log 0 = 0$ と定める.

証明 (1) は明らか.

(2) $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\sigma(A), \sigma(B) \subset (\alpha, \beta)$, $A \leq B$ とする. $c \leq \alpha$ のとき，$0 \leq A - cI \leq B - cI$ で $A - cI$ は可逆だから，$(B - cI)^{-1} \leq (A - cI)^{-1}$. よって $(cI - A)^{-1} \leq (cI - B)^{-1}$. $c \geq \beta$ のとき，$0 \leq cI - B \leq cI - A$ だから $(cI - A)^{-1} \leq (cI - B)^{-1}$.

(3) 最初の部分は定理 5.1.1 と系 5.1.9 による. $p < 0$ のとき，t^p は $(0, \infty)$ で単調増加でないから作用素単調でない. また，$p > 1$ のとき，$t/t^p = t^{1-p}$ は $(0, \infty)$ で作用素単調でないから，系 5.1.11 より t^p は作用素単調でない.

(4) $1 \leq p \leq 2$ のとき，$t^p/t = t^{p-1}$ が $(0, \infty)$ で作用素単調だから，定理 5.1.8 より t^p は $[0, \infty)$ で作用素凸. $p > 0$ のとき，連続性から，t^p の $(0, \infty)$ での作用素凸性と $[0, \infty)$ での作用素凸性は同値である. したがって

定理 5.1.7 より，$t^p/t = t^{p-1}$ が $(0,\infty)$ で作用素単調のときに限り，t^p が作用素凸になる．よって (3) より，$p \in (0,1) \cup (2,\infty)$ のとき t^p は作用素凸でない．$-1 \le p \le 0$ のとき，系 5.1.11 より $t^p = 1/t^{-p}$ は作用素凸．$p < -1$ のとき t^p が作用素凸にならないことは，下の命題 5.1.14 と定理 5.1.16 より示せるが，詳細は略する．

(5) 積分計算により $f(t) = \int_0^1 t^p dp$ $(t \ge 0)$ と表せる．$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A \ge 0$ のスペクトル分解をとり，フビニの定理を使うと

$$\langle f(A)x, x\rangle = \int_0^1 \langle A^p x, x\rangle dp, \qquad x \in \mathcal{H}$$

が示せる．これより f は作用素単調となる．

(6) (5) より $t/\log(1+t)$ は $(0,\infty)$ で作用素単調．系 5.1.11 より $\log(1+t)$ は $(0,\infty)$ で作用素単調だから，$\log t$ は $(1,\infty)$ で作用素単調である．$A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A, B \ge 0$ が可逆とし，$A \le B$ とすると，十分大きな $c > 0$ に対して $\sigma(cA) \subset (1,\infty)$ となる．よって $\log(cA) \le \log(cB)$. つまり $\log A + (\log c)I \le \log B + (\log c)I$ となり $\log A \le \log B$. ゆえに $\log t$ は $(0,\infty)$ で作用素単調である．さらに系 5.1.11 より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\log(\varepsilon + t) = \log\varepsilon + \log(1+\varepsilon^{-1}t)$ は $(0,\infty)$ で作用素凹．よって $\log t$ は $(0,\infty)$ で作用素凹である．

(7) f は $[0,\infty)$ で連続で $f(0) = 0$ であり，$f(t)/t = \log t$ が $(0,\infty)$ で作用素単調．よって定理 5.1.7 が適用できる．■

上の例 (7) より $\eta(t) = -t\log t$ $(t \ge 0)$ は作用素凹である．この $\eta(t)$ は情報関数と呼ばれ，情報理論やエントロピー論で基本的な役割を果たしている．$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A \ge 0$ に対して，$\eta(A) = -A\log A$ を A の**作用素エントロピー**と呼ぶ．また，$A \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, $A \ge 0$ のとき，A の**フォン・ノイマン・エントロピー**は $S(A) = \mathrm{tr}\,\eta(A) = -\mathrm{tr}(A\log A)$ と定義される．$S(A)$ が凹関数であることは，$\eta(t)$ の性質から明らかであるが，直接に示すことも難しくない．$\eta(t)$ の作用素凹性の最初の証明は中村-梅垣と C. デイヴィスにより独立に与えられた．

以下，作用素単調関数に関する重要な結果を述べるが，証明は割愛する．関数 f が (α,β) 上で連続微分可能であるとき，$t, s \in (\alpha,\beta)$ に対して

$$f^{[1]}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}, & t \ne s \\ f'(t), & t = s \end{cases}$$

と定める.

命題 5.1.13 (α, β) 上の連続微分可能な関数 f について，f が作用素単調であるための必要十分条件は，任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $t_1, \ldots, t_n \in (\alpha, \beta)$ に対して $n \times n$ 行列 $[f^{[1]}(t_i, t_j)]_{i,j=1}^n$ が正定値となることである.

命題 5.1.14 f を (α, β) 上の 2 回連続微分可能な関数とする．f が作用素凸ならば，任意の $s \in (\alpha, \beta)$ に対して $f^{[1]}(\cdot, s)$ は作用素単調である．逆に，ある $s \in (\alpha, \beta)$ に対して $f^{[1]}(\cdot, s)$ が作用素単調ならば，f は作用素凸である.

次の作用素単調関数に対する積分表示が，レーヴナーの理論における主要定理である.

定理 5.1.15 $(-1, 1)$ 上の連続関数 f について，f が作用素単調であるための必要十分条件は，$[-1, 1]$ 上の正の有限測度 m が存在して

$$f(t) = f(0) + \int_{-1}^{1} \frac{t}{1 - t\lambda} dm(\lambda), \qquad t \in (-1, 1).$$

このとき，測度 m は一意であり $m([-1, 1]) = f'(0)$.

いま，$\phi_\lambda(t) = t/(1 - \lambda t)$ とおき

$$\Gamma = \{f : (-1, 1) \text{ 上の作用素単調関数}, \ f(0) = 0, \ f'(0) = 1\}$$

とおくと，Γ は各点収束の位相をもつ位相線型空間 $\mathbb{R}^{(-1,1)}$ のコンパクト凸部分集合となっている．さらに，$\{\phi_\lambda : \lambda \in [-1, 1]\}$ は Γ の端点 (付録の定義 A.3.1 (1)) の全体と一致する．$f'(0) \neq 0$ として，$g(t) = \{f(t) - f(0)\}/f'(0)$, $\mu = (1/f'(0))m$ とおくと，$g \in \Gamma$ となり上の積分表示は

$$g(t) = \int_{-1}^{1} \phi_\lambda(t) d\mu(\lambda)$$

と書けるが，これは g に対するショケーの端点分解 (付録の A.3 節の最後を参照) になっている．分解の一意性は，Γ がショケー単体であることを意味する.

定理 5.1.15 より，開区間上の作用素単調関数は自動的に無限回微分可能であることがわかる．さらに，f が $(-1,1)$ で作用素単調のとき，積分表示を用いて

$$f(\zeta) = f(0) + \int_{-1}^{1} \frac{\zeta}{1-\zeta\lambda} dm(\lambda), \qquad \mathrm{Im}\,\zeta \neq 0$$

と定めると，f を複素上半平面および下半平面に解析接続できる．このとき

$$\mathrm{Im}\, f(\zeta) = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{Im}\,\zeta}{|1-\zeta\lambda|^2} dm(\lambda)$$

だから，$f(\zeta)$ は上半平面をそれ自身に写す．実は，この逆もいえて次が成立する．

定理 5.1.16　(α,β) を任意の開区間とする．連続関数 $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ が作用素単調であるための必要十分条件は，f の上半平面全体への解析接続が存在して上半平面をそれ自身に写すことである．

定理 5.1.15 で

$$f(-1+0) = \lim_{t\downarrow -1} f(t) = f(0) - \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\lambda} dm(\lambda) > -\infty$$

とすると

$$f(t) - f(-1+0) = \int_{-1}^{1} \frac{1+t}{(1-t\lambda)(1+\lambda)} dm(\lambda).$$

この表示の変数 t, λ を

$$\psi(t) = \frac{t-1}{1+t} = 1 - \frac{2}{1+t} \ :\ (0,\infty) \to (-1,1)$$

で変換して，測度 m を置き換えると，次の積分表示が得られる．これは次節の作用素平均の理論で重要な意味をもつ．

定理 5.1.17　$[0,\infty)$ 上の連続関数 $f \geq 0$ について，f が作用素単調であるための必要十分条件は，$[0,\infty]$ 上の正の有限測度 m が存在して

$$f(t) = \int_{[0,\infty]} \frac{t(1+\lambda)}{t+\lambda} dm(\lambda), \qquad t > 0.$$

このとき，測度 m は一意であり，$a = m(\{0\}), b = m(\{\infty\})$ とおくと

$$f(t) = a + bt + \int_{(0,\infty)} \frac{t(1+\lambda)}{t+\lambda} dm(\lambda).$$

また $a = f(0)$, $b = \lim_{t\to\infty} f(t)/t$.

例 5.1.18 定理 5.1.16 の積分表示の例として，次の 2 つを挙げておこう．

(1) $0 < p < 1$ のとき，$[0,\infty)$ 上の作用素単調関数 t^p の積分表示として，次がよく知られている：

$$t^p = \frac{\sin p\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{t\lambda^{p-1}}{t+\lambda} d\lambda.$$

これは

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \qquad 0 < p < 1$$

を $x = \lambda/t$ と置換すれば得られる．よって t^p の表現測度は $\frac{\sin p\pi}{\pi}\lambda^{p-1}(1+\lambda)^{-1}d\lambda$. ここで $d\lambda$ はルベーグ測度を表す．

(2) $\log t$ の積分表示

$$\log t = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+\lambda} - \frac{1}{t+\lambda}\right) d\lambda$$

は容易に確かめられる．これを変形して，$[0,\infty)$ 上の作用素単調関数 $\log(1+t)$ の積分表示

$$\log(1+t) = \int_1^\infty \frac{t}{\lambda(t+\lambda)} d\lambda$$

が得られる．よって $\log(1+t)$ の表現測度は $1_{[1,\infty)}(\lambda)\lambda^{-1}(1+\lambda)^{-1}d\lambda$. ここで $1_{[1,\infty)}$ は $[1,\infty)$ の定義関数である．

この節の最後に，古田により証明された作用素の順序を保存する興味ある不等式について解説する．

定理 5.1.19 (フルタ不等式) $p, r \geq 0$, $q \geq 1$ が $(1+2r)q \geq p + 2r$ を満たすとき，$A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $0 \leq A \leq B$ ならば

$$A^{(p+2r)/q} \leq (A^r B^p A^r)^{1/q}, \tag{5.4}$$

$$(B^r A^p B^r)^{1/q} \leq B^{(p+2r)/q}. \tag{5.5}$$

証明　$A+\varepsilon I, B+\varepsilon I$ から極限をとればよいから，A, B は可逆としてよい．

(5.4) の証明．$0 \le p \le 1$ の場合，定理 5.1.1 より $A^p \le B^p$ だから $A^{p+2r} = A^r A^p A^r \le A^r B^p A^r$．よって任意の $q \ge 1$ に対して $A^{(p+2r)/q} \le (A^r B^p A^r)^{1/q}$．

$p \ge 1$ の場合，$q = (p+2r)/(1+2r)$ のとき (5.4) を証明すれば十分である．実際このとき，定理 5.1.1 より，任意の $q \ge (p+2r)/(1+2r)$ に対して (5.4) が成立する．$C = |A^r B^{p/2}|$ とおいて極分解 $A^r B^{p/2} = VC$ をとる．$A^r B^{p/2}$ が可逆だから V はユニタリー．まず $0 \le r \le 1/2$ のとき，$A^{2r} \le B^{2r}$ だから $A^{-2r} \ge B^{-2r}$．よって

$$B^{-p/2}A^{-2r}B^{-p/2} \ge B^{-p/2}B^{-2r}B^{-p/2} = B^{-(p+2r)}.$$

したがって $q = (p+2r)/(1+2r)$ に対して

$$\begin{aligned}
A^{-r}(A^r B^p A^r)^{1/q} A^{-r} &= A^{-r}(VC^2V^*)^{1/q}A^{-r} \\
&= A^{-r}VC^{2/q}V^*A^{-r} \\
&= A^{-r}VC(C^2)^{\frac{1}{q}-1}CV^*A^{-r} \\
&= B^{p/2}(B^{p/2}A^{2r}B^{p/2})^{\frac{1}{q}-1}B^{p/2} \\
&= B^{p/2}(B^{-p/2}A^{-2r}B^{-p/2})^{1-\frac{1}{q}}B^{p/2} \\
&\ge B^{p/2}B^{-(p+2r)(1-\frac{1}{q})}B^{p/2} \\
&= B^{p-(p+2r)(1-\frac{1}{q})} = B \ge A.
\end{aligned}$$

上で補題 5.1.6 (1) と定理 5.1.1 を使った．ゆえに $A^{1+2r} \le (A^r B^p A^r)^{1/q}$．整理すると，$0 \le r \le 1/2$ のとき次が成立：

(a) $p \ge 1, q = (p+2r)/(1+2r)$ に対して $A^{1+2r} \le (A^r B^p A^r)^{1/q}$．

いま，$0 \le r \le \alpha$ $(\alpha > 0)$ のとき (a) が成立したとする．このとき，$A_1 = A^{1+2r}$, $B_1 = (A^r B^p A^r)^{1/q}$ に対して (a) が適用できるので，$0 \le r_1 \le \alpha$ のとき次が成立：

(b) $p_1 \ge 1, q_1 = (p_1+2r_1)/(1+2r_1)$ に対して $A_1^{1+2r_1} \le (A_1^{r_1} B_1^{p_1} A_1^{r_1})^{1/q_1}$．

ここで，$p_1 = q \ge 1$, $r_1 = \alpha$ とすると

$$q_1 = \frac{q+2\alpha}{1+2\alpha} = \frac{p+2\{(1+2\alpha)r+\alpha\}}{1+2\{(1+2\alpha)r+\alpha\}}$$

であり，(b) の不等式は

$$A^{(1+2r)(1+2\alpha)} \le (A^{(1+2r)\alpha}A^r B^p A^r A^{(1+2r)\alpha})^{1/q_1},$$

すなわち

$$A^{1+2\{(1+2\alpha)r+\alpha\}} \le (A^{(1+2\alpha)r+\alpha} B^p A^{(1+2\alpha)r+\alpha})^{1/q_1}$$

となる．$0 \le r \le \alpha$ のとき $\alpha \le (1+2\alpha)r + \alpha \le 2\alpha(1+\alpha)$ だから，(a) が $0 \le r \le 2\alpha(1+\alpha)$ のとき成立する．つまり，(a) の成立する r の範囲が 2 倍以上に広がる．$0 \le r \le 1/2$ から出発して上の論法をくり返すと，(a) がすべての $r \ge 0$ で成立することがいえる．

(5.5) の証明．$0 \le B^{-1} \le A^{-1}$ に (5.4) を用いると $B^{-(p+2r)/q} \le (B^{-r}A^{-p}B^{-r})^{1/q}$. この逆をとると (5.5) が得られる． ■

上の巧妙な証明法は，連続パラメータ r に関する数学的帰納法とでもいうべきものである．定理 5.1.1 は定理 5.1.19 で $r=0$ とした場合になっている．

5.2 作用素平均

この節で，久保-安藤による作用素平均の理論を解説する．ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ は無限次元とし固定しておく．

定義 5.2.1 $\mathcal{B}(\mathcal{H})_+ = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : A \ge 0\}$ とする．

(1) 2 項演算 $\sigma : (A,B) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+ \times \mathcal{B}(\mathcal{H})_+ \mapsto A\,\sigma\,B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ が**作用素結合**であるとは，任意の $A,B,C,D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ に対して次の (i)–(iii) が成立するときをいう：

(i) $A \le C,\ B \le D \Longrightarrow A\,\sigma\,B \le C\,\sigma\,D$ (単調性),

(ii) $C(A\,\sigma\,B)C \le (CAC)\,\sigma\,(CBC)$ (トランス不等式),

(iii) $A_n, B_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+,\ A_n \downarrow A,\ B_n \downarrow B \Longrightarrow A_n\,\sigma\,B_n \downarrow A\,\sigma\,B$ (上半連続性). ここで，$A_n \downarrow A$ は $A_1 \ge A_2 \ge \ldots$ かつ $A_n \xrightarrow{\text{SOT}} A$ を意味する．

(2) 作用素結合 σ がさらに

(iv) $I\,\sigma\,I = I$

を満たすとき，σ を**作用素平均**という．

以下この節では，A,B,C,D は常に $\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ の要素を表すものとする．

命題 5.2.2 σ を作用素結合とすると，C が可逆のとき

$$C(A\,\sigma\,B)C = (CAC)\,\sigma\,(CBC). \tag{5.6}$$

また，任意の $\alpha \ge 0$ に対して

$$\alpha(A\,\sigma\,B) = (\alpha A)\,\sigma\,(\alpha B) \quad (\text{正斉次性}). \tag{5.7}$$

証明　上の (ii) より

$$C^{-1}\{(CAC)\,\sigma\,(CBC)\}C^{-1} \le A\,\sigma\,B$$

だから

$$(CAC)\,\sigma\,(CBC) \le C(A\,\sigma\,B)C.$$

(ii) と合わせて (5.6) を得る．後半は，$\alpha > 0$ のときは，(5.6) で $C = \alpha^{1/2}I$ とおけばよい．$\alpha = 0$ のときは，$0\,\sigma\,0 = 0$ を示せばよいが，$0 < \alpha_n \downarrow 0$ とすると (iii) より

$$0\,\sigma\,0 = \text{s-}\lim_n (\alpha_n I)\,\sigma\,(\alpha_n I) = \text{s-}\lim_n \alpha_n (I\,\sigma\,I) = 0. \quad \blacksquare$$

補題 5.2.3　可逆な $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ に対して

$$A : B = (A^{-1} + B^{-1})^{-1} \tag{5.8}$$

と定めると，次が成立する．

(1) $A, B, C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ が可逆で $A \le C$, $B \le D$ ならば，$A : B \le C : D$.

(2) $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ とし，可逆な $A_n, B_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ が $A_n \downarrow A$, $B_n \downarrow B$ を満たすならば，$\text{s-}\lim_n A_n : B_n$ が存在する．さらに，この極限は $\{A_n\}, \{B_n\}$ の選び方によらない．

証明　(1) $A \le C$, $B \le D$ より $A^{-1} \ge C^{-1}$, $B^{-1} \ge D^{-1}$. よって $A^{-1} + B^{-1} \ge C^{-1} + D^{-1}$ だから，$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} \le (C^{-1} D^{-1})^{-1}$ が成立する．

(2) まず A, B が可逆として，$A_n \downarrow A$, $B_n \downarrow B$ ならば $A_n : B_n \downarrow A : B$ を示す．このとき，$0 < \alpha < \beta < +\infty$ がとれて $\sigma(A_n), \sigma(A), \sigma(B_n), \sigma(B) \subset [\alpha, \beta]$ となる．よって補題 5.1.4 より $A_n^{-1} \xrightarrow{\text{SOT}} A^{-1}$, $B_n^{-1} \xrightarrow{\text{SOT}} B^{-1}$ となり，$(A_n^{-1} + B_n^{-1}) \xrightarrow{\text{SOT}} A^{-1} + B^{-1}$. $\sigma(A_n^{-1} + B_n^{-1}), \sigma(A^{-1} + B^{-1}) \subset [2\beta^{-1}, 2\alpha^{-1}]$ だから，再び補題 5.1.4 より $A_n : B_n \xrightarrow{\text{SOT}} A : B$ を得る．この収束は上の (1) より単調減少である．次に，一般の $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ に対して，A_n, B_n が可逆で $A_n \downarrow A$, $B_n \downarrow B$ とすると，(1) より $\text{s-}\lim_n A_n : B_n$ が存在する (演習問題 2.10 参照)．別に，可逆な A_n', B_n' が $A_n' \downarrow A$, $B_n' \downarrow B$ を満たすとす

る．すべての $n, m \in \mathbb{N}$ に対して，$A_n \le A_n + A'_m - A$, $B_n \le B_n + B'_m - B$ だから

$$A_n : B_n \le (A_n + A'_m - A) : (B_n + B'_m - B). \tag{5.9}$$

$n \to \infty$ とすると $A_n + A'_m - A \downarrow A'_m$, $B_n + B'_m - B \downarrow B'_m$ だから，上で示したことより

$$(A_n + A'_m - A) : (B_n + B'_m - B) \downarrow A'_m : B'_m.$$

ゆえに，(5.9) で $n \to \infty$ として $\text{s-}\lim_n A_n : B_n \le A'_m : B'_m$. さらに $m \to \infty$ として $\text{s-}\lim_n A_n : B_n \le \text{s-}\lim_n A'_n : B'_n$. 対称性より $\text{s-}\lim_n A_n : B_n = \text{s-}\lim_n A'_n : B'_n$ を得る． ■

上の補題の (2) より，(5.8) を拡張して，任意の $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ に対して

$$A : B = \text{s-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (A + \varepsilon I) : (B + \varepsilon I)$$

と定義できる．この $A : B$ は A, B の**並列和**と呼ばれる．次に与える $A : B$ の変分表示は有用である．

補題 5.2.4 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$\langle (A : B)x, x \rangle = \inf\{\langle Ay, y\rangle + \langle Bz, z\rangle : y, z \in \mathcal{H},\ y + z = x\}.$$

証明 A, B が可逆とすると

$$\begin{aligned} A : B &= \{B^{-1}(A+B)A^{-1}\}^{-1} = \{(A+B) - B\}(A+B)^{-1}B \\ &= B - B(A+B)^{-1}B. \end{aligned}$$

よって任意の $x, y \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned} &\langle Ay, y\rangle + \langle B(x-y), x-y\rangle - \langle (A:B)x, x\rangle \\ &\quad = \langle Bx, x\rangle + \langle (A+B)y, y\rangle - 2\mathrm{Re}\langle Bx, y\rangle - \langle (A:B)x, x\rangle \\ &\quad = \langle B(A+B)^{-1}Bx, x\rangle + \langle (A+B)y, y\rangle - 2\mathrm{Re}\langle Bx, y\rangle \\ &\quad = \|(A+B)^{-1/2}Bx\|^2 + \|(A+B)^{1/2}y\|^2 \\ &\qquad\quad -2\mathrm{Re}\langle (A+B)^{-1/2}Bx, (A+B)^{1/2}y\rangle \\ &\quad \ge 0. \end{aligned}$$

特に $y=(A+B)^{-1}Bx$ とおくと，上式は 0 に等しい．ゆえに，A,B が可逆のとき結論がいえた．A,B が一般のとき

$$\begin{aligned}\langle (A:B)x,x\rangle &= \inf_{\varepsilon>0}\langle\{(A+\varepsilon I):(B+\varepsilon I)\}x,x\rangle \\ &= \inf_{\varepsilon>0}\inf_{y}\{\langle (A+\varepsilon I)y,y\rangle+\langle (B+\varepsilon I)(x-y),x-y\rangle\} \\ &= \inf_{y}\{\langle Ay,y\rangle+\langle B(x-y),x-y\rangle\}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

系 5.2.5　並列和 $A:B$ は作用素結合であり，次が成立する．

(1) 任意の $S\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して $S^*(A:B)S\le(S^*AS):(S^*BS)$.

(2) $(A:B)+(C:D)\le(A+C):(B+D)$.

証明　(1), (2) を先に示す．

(1) $y+z=x$ のとき，補題 5.2.4 より

$$\begin{aligned}\langle S^*(A:B)Sx,x\rangle &= \langle (A:B)Sx,Sx\rangle \\ &\le \langle ASy,Sy\rangle+\langle BSz,Sz\rangle \\ &= \langle S^*ASy,y\rangle+\langle S^*BSz,z\rangle.\end{aligned}$$

よって $S^*(A:B)S\le(S^*AS):(S^*BS)$.

(2) $y+z=x$ のとき

$$\begin{aligned}\langle\{(A:B)+(C:D)\}x,x\rangle &\le \langle Ay,y\rangle+\langle Bz,z\rangle+\langle Cy,y\rangle+\langle Dz,z\rangle \\ &= \langle (A+C)y,y\rangle+\langle (B+D)z,z\rangle.\end{aligned}$$

よって $(A:B)+(C:D)\le(A+C):(B+D)$.

次に，$A:B$ が作用素結合であることを示す．定義 5.2.1 の (i) は $A:B$ の定義より明らか．(ii) は (1) に含まれる．(iii) を示すために，$A_n\downarrow A$, $B_n\downarrow B$ とすると，$A:B\le A_n:B_n$ より $A:B\le \text{s-}\lim A_n:B_n$. すべての $\varepsilon>0$ に対して $A_n:B_n\le(A_n+\varepsilon I):(B_n+\varepsilon I)$ だから，補題 5.2.3 (2) より $\text{s-}\lim A_n:B_n\le(A+\varepsilon I):(B+\varepsilon I)$. よって $\text{s-}\lim A_n:B_n\le A:B$ となり $A_n:B_n\downarrow A:B$. ((i), (iii) は補題 5.2.4 を使っても容易.)　■

次の久保-安藤の基本定理は，作用素結合と $[0,\infty)$ 上の非負の作用素単調関数が 1 対 1 に対応することを主張する．

定理 5.2.6 任意の作用素結合 σ に対して，$[0,\infty)$ 上の作用素単調関数 $f \geq 0$ が一意的に存在して

$$f(t)I = I\,\sigma\,(tI), \qquad t \geq 0. \tag{5.10}$$

このとき次が成立する．

(1) $\sigma \mapsto f$ は作用素結合全体の集合から $[0,\infty)$ 上の非負の作用素単調関数全体の集合への 1 対 1 上へのアフィン対応である．さらに，$\sigma \mapsto f$ は順序を保存する．つまり，$\sigma_i \mapsto f_i$ $(i = 1, 2)$ のとき

$$A\,\sigma_1\,B \leq A\,\sigma_2\,B \ \ (A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+) \iff f_1(t) \leq f_2(t) \ \ (t \geq 0).$$

(2) A が可逆のとき

$$A\,\sigma\,B = A^{1/2} f(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2}. \tag{5.11}$$

(3) σ が作用素平均であることは $f(1) = 1$ と同値である．

証明 σ を作用素結合とする．まず，射影 $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が A, B と可換のとき，P が $A\,\sigma\,B$ と可換で

$$\{(AP)\,\sigma\,(BP)\}P = (A\,\sigma\,B)P \tag{5.12}$$

となることを示す．$PAP = AP \leq A$, $PBP = BP \leq B$ だから，定義 5.2.1 の (ii) と (i) より

$$\begin{aligned} P(A\,\sigma\,B)P &\leq (PAP)\,\sigma\,(PBP) \\ &= (AP)\,\sigma\,(BP) \leq A\,\sigma\,B. \end{aligned} \tag{5.13}$$

よって

$$|\{A\,\sigma\,B - P(A\,\sigma\,B)P\}^{1/2} P|^2 = P\{A\,\sigma\,B - P(A\,\sigma\,B)P\}P = 0$$

となるから，$\{A\,\sigma\,B - P(A\,\sigma\,B)P\}^{1/2} P = 0$. したがって $(A\,\sigma\,B)P = P(A\,\sigma\,B)P$. これより P は $A\,\sigma\,B$ と可換．同様にして P が $(AP)\,\sigma\,(BP)$ と可換であることも示せる．ゆえに (5.13) より (5.12) が得られる．

任意の $t \geq 0$ について，I, tI がすべての射影 P と可換だから，$I\,\sigma\,(tI)$ はすべての射影と可換である．ゆえに $I\,\sigma\,(tI)$ は I のスカラー倍である．し

たがって (5.10) を満たす $[0,\infty)$ 上の関数 $f \geq 0$ が存在する．f の一意性は明らか．定義 5.2.1 の (iii) より $f(t)$ は $t \geq 0$ で右連続である．(5.7) より $t^{-1}f(t)I = (t^{-1}I)\,\sigma\, I\ (t > 0)$ に注意すると，再び定義 5.2.1 の (iii) より，$t^{-1}f(t)$. それゆえ $f(t)$ は $t > 0$ で左連続でもある．よって f は $[0,\infty)$ で連続となる．

f の作用素単調性を示すために

$$f(A) = I\,\sigma\, A \tag{5.14}$$

を証明する．$\sum_{i=1}^n P_i = I$ である射影 P_i と $\alpha_i > 0$ により $A = \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i$ と書けるとき，各 P_i が I, A と可換だから，(5.12) を 2 回使って

$$\begin{aligned} I\,\sigma\, A &= \sum_{i=1}^n (I\,\sigma\, A)P_i = \sum_{i=1}^n \{P_i\,\sigma\,(AP_i)\}P_i \\ &= \sum_{i=1}^n \{P_i\,\sigma\,(\alpha_i P_i)\}P_i = \sum_{i=1}^n \{I\,\sigma\,(\alpha_i I)\}P_i \\ &= \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)P_i = f(A). \end{aligned}$$

一般の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ に対して，上の形の A_n がとれて $A_n \downarrow A$. 定義 5.2.1 の (iii) と補題 5.1.4 より

$$I\,\sigma\, A = \text{s-}\lim_{n\to\infty} I\,\sigma\, A_n = \text{s-}\lim_{n\to\infty} f(A_n) = f(A)$$

となり，(5.14) がいえた．ゆえに $A \leq B$ ならば

$$f(A) = I\,\sigma\, A \leq I\,\sigma\, B = f(B).$$

つまり f は作用素単調である．以下，(1)–(3) を証明する．

(1) 写像 $\sigma \mapsto f$ が $[0,\infty)$ 上の非負の作用素単調関数の集合への全射であることを示す．残りはほとんど明らか．$f \geq 0$ を $[0,\infty)$ 上で作用素単調とする．定理 5.1.17 より $a, b \geq 0$ と $(0,\infty)$ 上の正の有限測度 m が存在して

$$f(t) = a + bt + \int_{(0,\infty)} \frac{t(1+\lambda)}{t+\lambda}\,dm(\lambda).$$

$\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ における 2 項演算 σ を

$$A\,\sigma\, B = aA + bB + \int_{(0,\infty)} \frac{1+\lambda}{\lambda}\{(\lambda A) : B\}\,dm(\lambda)$$

と定義する．実際

$$(\lambda A):B \le (\lambda\|A\|I):(\|B\|I) = \frac{\|A\|\,\|B\|\lambda}{\|A\|\lambda+\|B\|}I$$

より

$$\frac{1+\lambda}{\lambda}\|(\lambda A):B\| \le \frac{\|A\|\,\|B\|(1+\lambda)}{\|A\|\lambda+\|B\|}$$

となるから，$\lambda^{-1}(1+\lambda)\{(\lambda A):B\}$ は $\lambda>0$ で一様有界である．よって $A\,\sigma\,B$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ の要素として定まる．このとき，$A\,\sigma\,B$ が作用素結合であることは，系 5.2.5 より簡単にわかる．例えば (iii) については，$A_n \downarrow A$, $B_n \downarrow B$ のとき，$(\lambda A_n):B_n \downarrow (\lambda A):B$ だから，ルベーグの収束定理を使って

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\langle (A_n\,\sigma\,B_n)x,x\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[a\langle A_nx,x\rangle + b\langle B_nx,x\rangle + \int_{(0,\infty)}\langle\{(\lambda A_n):B_n\}x,x\rangle dm(\lambda)\right] \\
&= a\langle Ax,x\rangle + b\langle Bx,x\rangle + \int_{(0,\infty)}\langle\{(\lambda A):B\}x,x\rangle dm(\lambda) \\
&= \langle (A\,\sigma\,B)x,x\rangle.
\end{aligned}$$

よって $A_n\,\sigma\,B_n \downarrow A\,\sigma\,B$ が成立．この作用素結合 σ に対して，$I\,\sigma\,(tI)=f(t)I$ $(t\ge 0)$ となるから，f は σ に対応している．

(2) A が可逆のとき，(5.6) と (5.14) より

$$A\,\sigma\,B = A^{1/2}(I\,\sigma\,A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2} = A^{1/2}f(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}.$$

(3) は明らか． ■

前定理によれば，任意の作用素結合 σ は，$[0,\infty)$ 上の作用素単調関数 $f\ge 0$ を用いて，A が可逆のとき (5.11) のように定義される．A,B が一般のときは

$$A\,\sigma\,B = \text{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}A_\varepsilon\,\sigma\,B_\varepsilon = \text{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}A_\varepsilon^{1/2}f(A_\varepsilon^{-1/2}B_\varepsilon A_\varepsilon^{-1/2})A_\varepsilon^{1/2}$$

と定めることができる．ここで $A_\varepsilon = A+\varepsilon I$, $B_\varepsilon = B+\varepsilon I$. 関数 f を σ の**表現関数**と呼ぶ．任意の $s,t\ge 0$ に対して，(5.7) と (5.10) より $(sI)\,\sigma\,(tI)$ は I のスカラー倍なので，このスカラーを単に $s\,\sigma\,t$ で表す．

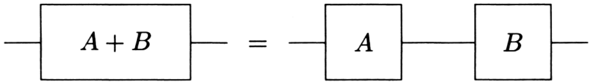
また，次の命題は前定理の証明より明らかであろう．

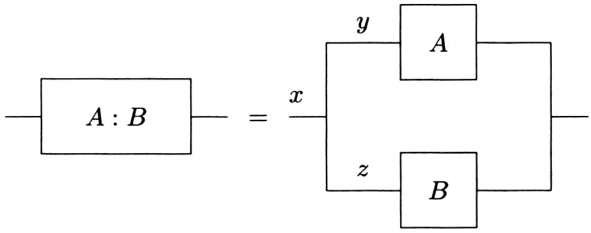
命題 5.2.7　任意の作用素結合 σ に対して，$[0,\infty]$ 上の正の有限測度 m が一意的に存在して

$$A\,\sigma\,B = aA + bB + \int_{(0,\infty)} \frac{1+\lambda}{\lambda}\{(\lambda A) : B\}dm(\lambda). \tag{5.15}$$

ここで $a = m(\{0\})$, $b = m(\{\infty\})$. この $\sigma \mapsto m$ は作用素結合の集合から $[0,\infty]$ 上の正の有限測度の集合への 1 対 1 上へのアフィン対応である．

ここで，電気回路網の観点から作用素結合を解釈しておこう．n 個の入出力端子をもつ電気回路のインピーダンスは正定値の $n \times n$ 行列 A で表される．電流と電圧はそれぞれ n 次元ベクトル x, v で表され，$v = Ax$ の関係が成立する．このとき消費されるエネルギーが $\langle Ax, x\rangle$ で与えられる．2 つの電気回路のインピーダンス行列を A, B とする．これらを直列につないだときのインピーダンスが和 $A + B$ であり，並列につないだときのそれが並列和 $A : B$ である．補題 5.2.4 の変分表示は，エネルギーが最小になるように A, B の回路に電流が流れるというマックスウェルの原理を意味する．直列，並列の接続を図に示すと





一般の作用素結合 σ は，2 つのインピーダンス A, B から新しいインピーダンス $A\,\sigma\,B$ を定める一定の方式を与える．命題 5.2.7 の積分表示 (5.15) は，これが (無限の) 重みつきの並列接続と (無限の) 重みつきの直列接続を組み合わせた回路接続で実現できることを意味している．このように，作用素結合の理論は電気回路網の数学的理論と見ることができる．

積分表示 (5.15) を用いると，一般の作用素結合 σ に関する性質の多くが並列和について確かめるだけで導くことができる．次の系がその例で，証明は系 5.2.5 と積分表示より明らかである．

系 5.2.8 任意の作用素結合 σ に対して次が成立．

(1) 任意の $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して $S^*(A\,\sigma\,B)S \le (S^*AS)\,\sigma\,(S^*BS)$ (トランス不等式)．

(2) $(A\,\sigma\,B) + (C\,\sigma\,D) \le (A+C)\,\sigma\,(B+D)$ (凹性)．

作用素平均の基本的な例を挙げておこう．

例 5.2.9 (1) $A\,l\,B = A$, $A\,r\,B = B$ は明らかに作用素平均である．これらの表現関数はそれぞれ $1, t$ である．

(2) 作用素平均 $A\,\nabla\,B = \frac{1}{2}(A+B)$ は**算術平均**と呼ばれる．これの表現関数は $\frac{1}{2}(1+t)$.

(3) 作用素平均 $A\,!\,B = 2(A:B)$ は**調和平均**と呼ばれる．これの表現関数は $2t/(1+t)$.

(4) 表現関数 $t^{1/2}$ の作用素平均を**幾何平均**といい，記号 $\#$ で表す．A が可逆のとき

$$A\,\#\,B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}.$$

(5) $0 \le p \le 1$ のとき，作用素単調関数 t^p に対応する作用素平均を **p-べき平均**といい，記号 $\#_p$ で表す．$\#_0 = l$, $\#_{1/2} = \#$, $\#_1 = r$ である．

(6) 作用素単調関数 $(t-1)/\log t$ (例 5.1.12 (5)) に対応する作用素平均を**対数平均**といい，記号 λ で表す．

命題 5.2.10 $\nabla, !, \#, \lambda$ の間には次の大小関係がある：

$$A\,!\,B \le A\,\#\,B \le A\,\lambda\,B \le A\,\nabla\,B.$$

証明 定理 5.2.6 (1) より

$$\frac{2t}{1+t} \le t^{1/2} \le \frac{t-1}{\log t} \le \frac{1+t}{2}, \qquad t > 0 \tag{5.16}$$

を示せばよい．これらは，微分を使って初等的に示せるので演習問題としておく． ■

幾何平均と調和平均について，2×2 作用素行列を用いた変分表示が次のように与えられる．

命題 5.2.11 (1)

$$A \# B = \max\left\{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+ : \begin{bmatrix} A & X \\ X & B \end{bmatrix} \geq 0\right\}.$$

(2)

$$A \,!\, B = \max\left\{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+ : \begin{bmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 2B \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} X & X \\ X & X \end{bmatrix}\right\}.$$

証明 (1) A, B が可逆のとき

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} I & A^{-1/2}XB^{-1/2} \\ B^{-1/2}XA^{-1/2} & I \end{bmatrix} \\
&\quad = \begin{bmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & B^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & X \\ X & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & B^{-1/2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

だから，$\begin{bmatrix} A & X \\ X & B \end{bmatrix} \geq 0$ は $\begin{bmatrix} I & A^{-1/2}XB^{-1/2} \\ B^{-1/2}XA^{-1/2} & I \end{bmatrix} \geq 0$ と同値である．$S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} I & S \\ S^* & I \end{bmatrix} \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix} I & S \\ S^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle \geq 0 \ \ (x, y \in \mathcal{H}) \\
&\Longleftrightarrow \quad \langle x, x\rangle + 2\mathrm{Re}\langle Sy, x\rangle + \langle y, y\rangle \geq 0 \ \ (x, y \in \mathcal{H}) \\
&\Longleftrightarrow \quad |\langle Sy, x\rangle| \leq \frac{\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle}{2} \ \ (x, y \in \mathcal{H}) \\
&\Longleftrightarrow \quad ||S|| \leq 1.
\end{aligned}$$

よって $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ について

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A & X \\ X & B \end{bmatrix} \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad ||A^{-1/2}XB^{-1/2}|| \leq 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad B^{-1/2}XA^{-1}XB^{-1/2} \leq I \\
&\Longleftrightarrow \quad XA^{-1}X \leq B.
\end{aligned}$$

$X = A \# B$ とすると

$$\begin{aligned}
&XA^{-1}X \\
&= A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}A^{-1}A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2} \\
&= A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2} = B.
\end{aligned}$$

また，$XA^{-1}X \le B$ とすると，$A^{-1/2}XA^{-1}XA^{-1/2} \le A^{-1/2}BA^{-1/2}$ より $A^{-1/2}XA^{-1/2} \le (A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}$. よって $X \le A\#B$. ゆえに $X = A\#B$ が $XA^{-1}X \le B$ を満たす最大の $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ である．

A, B が一般のとき，$A_\varepsilon = A + \varepsilon I$, $B_\varepsilon = B + \varepsilon I$ $(\varepsilon > 0)$ とおくと $\begin{bmatrix} A_\varepsilon & A_\varepsilon \# B_\varepsilon \\ A_\varepsilon \# B_\varepsilon & B_\varepsilon \end{bmatrix} \ge 0$. $\varepsilon \downarrow 0$ として $\begin{bmatrix} A & A\#B \\ A\#B & B \end{bmatrix} \ge 0$. また，$X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$, $\begin{bmatrix} A & X \\ X & B \end{bmatrix} \ge 0$ とすると，$\begin{bmatrix} A_\varepsilon & X \\ X & B_\varepsilon \end{bmatrix} \ge 0$ より $X \le A_\varepsilon \# B_\varepsilon$. $\varepsilon \downarrow 0$ として $X \le A\#B$. ゆえに結論が示せた．

(2) は補題 5.2.4 の表示の簡単な書き換えである．詳しくは演習問題としておく． ■

命題 5.2.12 σ を作用素平均とする．任意の射影 P, Q に対して

$$P\,\sigma\,Q = a(P - P\wedge Q) + b(Q - P\wedge Q) + P\wedge Q.$$

ここで，a, b は命題 5.2.7 と同じで，$P\wedge Q$ は $\operatorname{ran} P \cap \operatorname{ran} Q$ 上への射影を表す．

証明 一般の A, B について，補題 5.2.4 より $\ker A \cup \ker B \subset \ker A : B$ がわかる．よって命題 2.1.6 より $\overline{\operatorname{ran}}(A:B) \subset \overline{\operatorname{ran}}\,A \cap \overline{\operatorname{ran}}\,B$. ゆえに任意の $\lambda > 0$ に対して，$\operatorname{ran}((\lambda P):Q) \subset \operatorname{ran} P\wedge Q$ であり，$P\wedge Q$ が $\lambda P, Q$ と可換であるから，(5.12) より

$$\begin{aligned}
(\lambda P):Q &= \{(\lambda P):Q\}(P\wedge Q) \\
&= \{(\lambda P(P\wedge Q)):(Q(P\wedge Q))\}(P\wedge Q) \\
&= \{(\lambda(P\wedge Q)):(P\wedge Q)\}(P\wedge Q) \\
&= \{(\lambda I):I\}(P\wedge Q) = \frac{\lambda}{1+\lambda}(P\wedge Q).
\end{aligned}$$

したがって命題 5.2.7 より

$$\begin{aligned}
P\,\sigma\,Q &= aP + bQ + \left\{\int_{(0,\infty)} dm(\lambda)\right\}(P\wedge Q) \\
&= aP + bQ + (1-a-b)(P\wedge Q) \\
&= a(P - P\wedge Q) + b(Q - P\wedge Q) + P\wedge Q. \quad ■
\end{aligned}$$

系 5.2.13　任意の射影 P, Q に対して

$$P\,!\,Q = P\,\#\,Q = P\,\lambda\,Q = P \wedge Q.$$

証明　作用素平均 σ の表現関数を f とすると，$a = f(0)$, $b = \lim_{t\to\infty} f(t)/t$ である (定理 5.1.17). $!$, $\#$, λ については $a = b = 0$ となる．■

正定値作用素の値域に関しては，次の公式が知られている．

命題 5.2.14　(1) $\mathrm{ran}(A^2 + B^2)^{1/2} = \mathrm{ran}\,A + \mathrm{ran}\,B$.

(2) $\mathrm{ran}(A^2 : B^2)^{1/2} = \mathrm{ran}\,A \cap \mathrm{ran}\,B$.

証明　(1) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ を考え，極分解 $\mathbf{X}^* = \mathbf{V}|\mathbf{X}^*|$ をとると，$\mathbf{X} = |\mathbf{X}^*|\mathbf{V}^*$ より $\mathrm{ran}\,\mathbf{X} = \mathrm{ran}\,|\mathbf{X}^*|$. ところで

$$\begin{aligned}
\mathrm{ran}\,\mathbf{X} &= \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x, y \in \mathcal{H} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} Ax + By \\ 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathcal{H} \right\} \\
&= (\mathrm{ran}\,A + \mathrm{ran}\,B) \oplus 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ran}\,|\mathbf{X}^*| &= \mathrm{ran}\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \right)^{1/2} \\
&= \mathrm{ran} \begin{bmatrix} (A^2 + B^2)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \mathrm{ran}(A^2 + B^2)^{1/2} \oplus 0.
\end{aligned}$$

したがって $\mathrm{ran}(A^2 + B^2)^{1/2} = \mathrm{ran}\,A + \mathrm{ran}\,B$.

(2) $A^2 : B^2 \le A^2$ かつ $A^2 : B^2 \le B^2$ に注意すると，定理 2.1.23 より $\mathrm{ran}(A^2 : B^2)^{1/2} \subset \mathrm{ran}\,A \cap \mathrm{ran}\,B$. 逆に，$x \in \mathrm{ran}\,A \cap \mathrm{ran}\,B$, $||x|| = 1$ とする．$P_x = x \otimes x$ ($\mathbb{C}x$ への射影) とおく．$u \in \mathcal{H}$ で $x = Au$ とすると，任意の $y \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle P_x y, y \rangle &= |\langle x, y \rangle|^2 = |\langle u, Ay \rangle|^2 \\
&\le ||u||^2 ||Ay||^2 = ||u||^2 \langle A^2 y, y \rangle.
\end{aligned}$$

よって $P_x \le \|u\|^2 A^2$. B についても同様な不等式が成立するから，$\alpha \ge 0$ が存在して $P_x \le \alpha A^2$, $P_x \le \alpha B^2$. このとき

$$\frac{1}{2}P_x = P_x : P_x \le (\alpha A^2) : (\alpha B^2) = \alpha(A^2 : B^2).$$

したがって $P_x^2 = P_x \le 2\alpha(A^2 : B^2)$ となり，再び定理 2.1.23 より $x \in \operatorname{ran} P_x \subset \operatorname{ran}(A^2 : B^2)^{1/2}$. ■

この節の残りで，作用素平均の間のいくつかの変換を作用素単調関数の変換と対応させて考えてみよう．

σ を作用素平均とし，その表現関数を f とする．このとき $(0,\infty)$ で $f > 0$ となる．実際，ある $\alpha > 0$ で $f(\alpha) = 0$ とすると，$f(t) = 0$ $(0 \le t \le \alpha)$ となり f の凹性から $f \equiv 0$. これは $f(1) = 1$ に反する．よって系 5.1.11 より $t/f(t)$ が $(0,\infty)$ で作用素単調である．さらに $f(t^{-1})^{-1}$, $tf(t^{-1})$ も $(0,\infty)$ で作用素単調である (演習問題 5.2)．これらの関数の 0 における値は $t \downarrow 0$ での極限値で定めることができて，$[0,\infty)$ で作用素単調になる．したがって次の定義が意味をもつ．

定義 5.2.15 σ を作用素平均とし，その表現関数を f とする．

(1) $tf(t^{-1})$ を表現関数にもつ作用素平均を σ の**転置**といい，σ' で表す．$\sigma = \sigma'$ のとき σ を**対称**という．

(2) $f(t^{-1})^{-1}$ を表現関数にもつ作用素平均を σ の**随伴**といい，σ^* で表す．

(3) $t/f(t)$ を表現関数にもつ作用素平均を σ の**双対**といい，$\sigma^\perp$ で表す．

次の命題は上の定義より容易なので演習問題とする．

命題 5.2.16 σ を作用素平均とし，f を σ の表現関数とする．

(1) $A\,\sigma'\,B = B\,\sigma\,A$.

(2) σ が対称 $\Longleftrightarrow$ $f(t) = tf(t^{-1})$ $(t > 0)$.

(3) A, B が可逆のとき $A\,\sigma^*\,B = (A^{-1}\,\sigma\,B^{-1})^{-1}$.

(4) $(\sigma')' = \sigma$, $(\sigma^*)^* = \sigma$, $(\sigma^\perp)^\perp = \sigma$.

(5) $\sigma^\perp = (\sigma')^* = (\sigma^*)'$, $\sigma' = (\sigma^*)^\perp = (\sigma^\perp)^*$, $\sigma^* = (\sigma')^\perp = (\sigma^\perp)'$.

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ が作用素結合 [作用素平均] のとき

$$(A, B) \mapsto (A\,\sigma_1\,B)\,\sigma_3\,(A\,\sigma_2\,B)$$

が作用素結合 [作用素平均] となる．これを $(\sigma_1)\,\sigma_3\,(\sigma_2)$ で表す．また，すべての A, B に対して $A\,\sigma_1\,B \le A\,\sigma_2\,B$ が成立するとき，$\sigma_1 \le \sigma_2$ と書く．

命題 5.2.17　任意の対称な作用素平均 σ に対して $! \le \sigma \le \nabla$. つまり，対称な作用素平均のうちで ∇ が最大で，$!$ が最小である．

証明　f を σ の表現関数とする．定理 5.2.6 (1) より

$$\frac{2t}{1+t} \le f(t) \le \frac{1+t}{2}, \qquad t \ge 0$$

を示せばよい．定理 5.1.15 の下で述べたように，f は $(0,\infty)$ で微分可能である．命題 5.2.16 (2) より $f(t) = tf(t^{-1})$ $(t > 0)$. この両辺を $t = 1$ で微分して $f'(1) = f(1) - f'(1) = 1 - f'(1)$. よって $f'(1) = 1/2$ であり，f の凹性より $f(t) \le (1+t)/2$. 命題 5.2.16 (5) より σ^* も対称だから，$f(t^{-1})^{-1}$ についても同じ議論が適用できて $f(t^{-1})^{-1} \le (1+t)/2$. よって $f(t) \ge 2t/(1+t)$. ■

補題 5.2.18　$f \ge 0$ を $f(1) = 1$ である $[0,\infty)$ 上の作用素単調関数とすると

$$\begin{cases} t \le f(t) \le 1 & (0 \le t \le 1) \\ 1 \le f(t) \le t & (1 \le t < \infty) \end{cases}$$

が成立する．

証明　$f(0) \ge 0, f(1) = 1$ であり，f が $[0,\infty)$ 上で単調増加かつ凹であることから容易に示せる．■

命題 5.2.19　任意の作用素平均 σ に対して次が成立．

(1) $(A\,\sigma\,B) + (B\,\sigma\,A) \le A + B$.
(2) $(A\,\sigma\,B) : (B\,\sigma\,A) \ge A : B$.
(3) $(A\,\sigma\,B)\,\#\,(A\,\sigma^{\perp}\,B) = A\,\#\,B$.
(4) $(A\,\sigma\,B) + (A\,\sigma^{\perp}\,B) \le A + B$.
(5) $(A\,\sigma\,B) : (A\,\sigma^{\perp}\,B) \ge A : B$.

証明　$(A, B) \mapsto \frac{1}{2}\{(A\,\sigma\,B) + (B\,\sigma\,A)\}$, $2\{(A\,\sigma\,B) : (B\,\sigma\,A)\}$ はともに対称な作用素平均だから，命題 5.2.17 より

$$\frac{1}{2}\{(A\,\sigma\,B) + (B\,\sigma\,A)\} \le A \nabla B,$$

$$2\{(A\,\sigma\,B):(B\,\sigma\,A)\} \geq A\,!\,B.$$

つまり (1), (2) が成立する．

σ の表現関数を f とする．(3)–(5) の左辺は作用素結合であり，それらの表現関数は

$$(1\,\sigma\,t)\,\#\,(1\,\sigma^{\perp}\,t) = \left\{f(t)\cdot\frac{t}{f(t)}\right\}^{1/2} = t^{1/2},$$

$$(1\,\sigma\,t) + (1\,\sigma^{\perp}\,t) = f(t) + \frac{t}{f(t)} = \frac{t+f(t)^2}{f(t)},$$

$$(1\,\sigma\,t):(1\,\sigma^{\perp}\,t) = \left\{\frac{1}{f(t)} + \frac{f(t)}{t}\right\}^{-1} = \frac{tf(t)}{t+f(t)^2}.$$

よって (3) が成立．(4) は

$$\frac{t+f(t)^2}{f(t)} \leq 1+t, \tag{5.17}$$

すなわち $\{f(t)-1\}\{t-f(t)\} \geq 0$ を示せばよいが，これは補題 5.2.18 より明らか．(5) は

$$\frac{tf(t)}{t+f(t)^2} \geq \frac{t}{1+t}$$

を示せばよいが，これは (5.17) と同値である． ■

次は系 5.2.8 (2) の類似物である．

命題 5.2.20 任意の作用素結合 σ に対して

$$(A\,\sigma\,B):(C\,\sigma\,D) \geq (A:C)\,\sigma\,(B:D).$$

証明 $\sigma = 0$ (i.e. 表現関数 f が $f \equiv 0$) ならば成立するから，$\sigma \neq 0$ としてよい．このとき σ が作用素平均としてよい．上半連続性より A, B, C, D が可逆のときに示せば十分である．このとき，問題の不等式は

$$(A^{-1}\,\sigma^*\,B^{-1} + C^{-1}\,\sigma^*\,D^{-1})^{-1} \geq \{(A^{-1}+C^{-1})\,\sigma^*\,(B^{-1}+D^{-1})\}^{-1}$$

と書けるが，これは系 5.2.8 (2) より成立する． ■

最後に，2 つの作用素平均 σ, τ を逐次的に反復させて新しい作用素平均をつくる方法を説明するが，証明は省略する．

補題 5.2.21　σ_n $(n \in \mathbb{N})$, σ を作用素平均とし，それらの表現関数を f_n, f, 積分表示の測度を m_n, m とする．このとき次は同値：

(i) すべての A, B に対して $A \sigma_n B \xrightarrow{\text{WOT}} A \sigma B$;

(ii) すべての $t > 0$ に対して $f_n(t) \to f(t)$;

(iii) $C([0,\infty])^*$ の弱 $*$ 位相で $m_n \to m$.

上の同値な条件が成立するとき，$\{\sigma_n\}$ が σ に収束するという．

命題 5.2.22　作用素平均 σ, τ の少なくとも一方が l, r と異なるとする．また σ_0, τ_0 を任意の作用素平均とする．

(1) $\sigma_{n+1} = (\sigma_n)\,\sigma\,(\tau_n)$, $\tau_{n+1} = (\sigma_n)\,\tau\,(\tau_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ と定めると，$\{\sigma_n\}$, $\{\tau_n\}$ は同一の作用素平均に収束する．

(2) $\sigma_{n+1} = (\sigma_n)\,\sigma\,(\tau_n)$, $\tau_{n+1} = (\sigma_{n+1})\,\tau\,(\tau_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ と定めると，$\{\sigma_n\}$, $\{\tau_n\}$ は同一の作用素平均に収束する．

上の (1) で $\sigma_0 = \sigma$, $\tau_0 = \tau$ としたときの極限の作用素平均を σ, τ の**混成**といい，$\sigma \times \tau$ で表す．例えば，$\nabla \times ! = \#$ (一般に $\sigma \times \sigma^\perp = \#$ が成立) であり，また $\nabla \times \#$ は**ガウス平均**と呼ばれる．

次は上の (2) の具体例である．

命題 5.2.23　命題 5.2.22 (2) で $\sigma = \nabla$, $\tau = \#$, $\sigma_0 = l$, $\tau_0 = r$ とすると，$\{\sigma_n\}$, $\{\tau_n\}$ は対数平均 λ に収束する．つまり，任意の A, B に対して

$$\begin{aligned} A_1 &= A \nabla B, & B_1 &= A_1 \# B, \\ A_{n+1} &= A_n \nabla B_n, & B_{n+1} &= A_{n+1} \# B_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

と定めると，$A_n \xrightarrow{\text{WOT}} A \lambda B$ かつ $B_n \xrightarrow{\text{WOT}} A \lambda B$.

演習問題 5

1. (5.3) の表式を示せ．

2. $(0, \infty)$ 上の連続関数 $f > 0$ について，f, $f(t^{-1})^{-1}$, $tf(t^{-1})$ の作用素単調性がすべて同値であることを示せ．

3. $\lim_{t \downarrow 0} f(t) = 0$ となる $(0, \infty)$ 上の連続関数 $f > 0$ が作用素凸ならば，$f(t^{-1})^{-1}$ も作用素凸であることを証明せよ．

4. $[0,\infty)$ 上の連続関数 $f \geq 0$ と $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ について次を示せ.
(1) f が作用素単調 (つまり作用素凹) ならば $f(A\,!\,B) \leq f(A)\,!\,f(B)$.
(2) $f(0)=0$ で f が作用素凸ならば $f(A\,!\,B) \geq f(A)\,!\,f(B)$.

5. $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ のとき次を示せ.
(1) $p > q \geq 1$ ならば

$$\left(\frac{A^p + B^p}{2}\right)^{1/p} \geq \left(\frac{A^q + B^q}{2}\right)^{1/q}.$$

(2) $A \vee B = \text{s-}\lim_{p\to\infty}(\frac{1}{2}(A^p + B^p))^{1/p}$ が存在する.
(3) 上の $A \vee B$ について, $A \vee B \geq A$ かつ $A \vee B \geq B$.

6. 定理 5.1.17 の上で述べた方針に従って, 定理 5.1.15 から定理 5.1.17 を導け.

7. 例 5.1.18 の (1), (2) の積分表示を確かめよ.

8. (5.16) の一連の不等式を示せ.

9. 命題 5.2.11 の (2) を証明せよ.

10. 命題 5.2.16 を証明せよ.

11. 次を示せ.
(1) ∇, $!$, $\#$, λ は対称.
(2) $\nabla^* = !$, $\#^* = \#$.
(3) $0 \leq p \leq 1$ のとき $(\#_p)' = \#_{1-p}$, $(\#_p)^* = \#_p$.

12. 自己双対 (i.e. $\sigma^\perp = \sigma$) である作用素平均は $\#$ だけであることを示せ.

13. 次を証明せよ. 任意の対称な作用素平均 σ に対して, $[0,1]$ 上の確率測度 n が一意的に存在して

$$A\,\sigma\,B = \frac{c}{2}(A+B) + \int_{(0,1]} \frac{1+\lambda}{2\lambda}\{(\lambda A) : B + A : (\lambda B)\}dn(\lambda).$$

ここで $c = n(\{0\})$. この $\sigma \mapsto n$ は対称な作用素平均の集合から $[0,1]$ 上の確率測度の集合への 1 対 1 上へのアフィン対応である.

14. σ_i, f_i $(i = 1, 2, 3)$ を作用素平均とその表現関数とする．次を示せ．

(1) $(\sigma_1)\,\sigma_3\,(\sigma_2)$ の表現関数は $f_1(t) f_3(f_2(t)/f_1(t))$.

(2) $\{(\sigma_1)\,\sigma_3\,(\sigma_2)\}' = (\sigma_2')\,\sigma_3'\,(\sigma_1')$, $\{(\sigma_1)\,\sigma_3\,(\sigma_2)\}^* = (\sigma_1^*)\,\sigma_3^*\,(\sigma_2^*)$, $\{(\sigma_1)\,\sigma_3\,(\sigma_2)\}^{\perp} = (\sigma_2^{\perp})\,\sigma_3^{\perp}\,(\sigma_1^{\perp})$.

(3) $\sigma_1 \le \sigma_2 \Longleftrightarrow \sigma_1' \le \sigma_2' \Longleftrightarrow \sigma_1^* \ge \sigma_1^* \Longleftrightarrow \sigma_1^{\perp} \ge \sigma_2^{\perp}$.

15. σ を表現関数 f をもつ作用素平均とし，$\alpha = f'(1)$ とするとき，次を示せ．

(1) $0 \le \alpha \le 1$.

(2) $\alpha = 0 \Longrightarrow \sigma = l$.

(3) $\alpha = 1 \Longrightarrow \sigma = r$.

(4) $0 < \alpha < 1$ のとき $((1-\alpha)^{-1}A) : (\alpha^{-1}B) \le A\,\sigma\,B \le (1-\alpha)A + \alpha B$.

16. σ を作用素平均とし，$A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ とする．次を証明せよ．

(1) $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H}) \Longrightarrow A\,\sigma\,B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$.

(2) $||A\,\sigma\,B|| \le ||A||\,\sigma\,||B||$, $||A\,\sigma\,B||_p \le ||A||_p\,\sigma\,||B||_p$ $(1 \le p < \infty)$.
(ヒント：$\alpha \in \mathbb{R}$ のとき $A : B \le \alpha^2 A + (1-\alpha)^2 B$ を示し，これを用いてまず $||A : B||_p \le ||A||_p : ||B||_p$ を導け.)

第 6 章

作用素特論

この章では，作用素論の話題から重要で興味のあるものをいくつか選んで解説する．6.1 節で，フレドホルム作用素とフレドホルム指数について基本的な事柄を説明する．幾何学的な対象に関連して現れる作用素の場合に，このフレドホルム指数は位相的な量と関係することが多い．そのため，フレドホルム理論は幾何学と関数解析学との接着剤的な役割を果たしている．6.2 節で，縮小作用素のユニタリー・ダイレーションから始めて，種々のダイレーション型の定理についてかなり詳しく議論する．与えられた作用素の定義域を拡大して，もっと扱いやすい作用素に膨張させるというダイレーションの手法は，作用素論でしばしば有効に使われる．6.3 節で，サブ正規，クェーサイ正規，ハイポ正規などの正規作用素に近い作用素について基本的な事柄を解説する．これらの作用素は，正規作用素と似た多くの性質をもっており，最も作用素論らしい研究対象といえる．最後の 6.4 節で，バナッハ空間またはヒルベルト空間上の確率測度 (特にガウス測度) について，共分散作用素を中心に説明する．この章では，6.3 節で 6.1, 6.2 節の結果を使う他は，各節は独立している．また，6.3 節では正規作用素のスペクトル分解を既知としているので，付録の A.5 節も併せて読んでもらいたい．

6.1 フレドホルム理論

コンパクト作用素の全体 $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の閉部分空間だから，商空間 $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ が定義できる．$\pi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ を商写像 (i.e. $\pi(A) = A + \mathcal{C}(\mathcal{H})$) とし，商ノルムを

$$||\pi(A)|| = \inf\{||A + K|| : K \in \mathcal{C}(\mathcal{H})\}$$

と定めると，命題 1.2.6 より $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ はバナッハ空間になる．さらに次が成立．

補題 6.1.1　$A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して $\pi(A)\pi(B) = \pi(AB)$, $\pi(A)^* = \pi(A^*)$ と定めると，$\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ は単位元 $\pi(I)$ をもつバナッハ $*$-環 (付録の定義 A.5.1 (2)) になる．このとき，$\pi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ は上への $*$-準同型である．

証明　$\mathcal{C}(\mathcal{H})$ が $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の両側イデアルだから，積と $*$ 演算が上のように定義できて，$\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ が $*$-環になることは容易に示せる．ノルムについて

$$\begin{aligned} ||\pi(A)\pi(B)|| &= \inf\{||AB + K|| : K \in \mathcal{C}(\mathcal{H})\} \\ &\leq \inf\{||(A+K)(B+L)|| : K, L \in \mathcal{C}(\mathcal{H})\} \\ &\leq \inf\{||A+K||\,||B+L|| : K, L \in \mathcal{C}(\mathcal{H})\} \\ &= ||\pi(A)||\,||\pi(B)||. \end{aligned}$$

また，$||\pi(A)^*|| = ||\pi(A)||$ も簡単．ゆえに $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ はバナッハ $*$-環になる．π が $*$-準同型であることは明らか．■

実は，$\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ は C^*-環 (定義 A.5.1 (3)) となるが，この事実は以下で使わない．C^*-環 $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ は**カルキン環**と呼ばれる．

$\mathcal{H}$ が有限次元のときは，$\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H}) = \{0\}$ であり以下の議論が無意味となるので，この節では $\mathcal{H}$ は無限次元と仮定する．

定義 6.1.2　$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする．

(1) A が**フレドホルム作用素**とは，$\pi(A)$ が $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ で可逆，すなわち $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在して $AB - I, BA - I \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ となることである．

(2) A が**左** [**右**] **フレドホルム**とは，$\pi(A)$ が $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ で左 [右] 可逆，すなわち $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在して $BA - I$ $[AB - I] \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ となることである．左または右フレドホルムの A を**半フレドホルム**という．

(3) $\mathcal{H}$ 上のフレドホルム作用素の全体を $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ で表す．また，左，右，半フレドホルム作用素の全体をそれぞれ $\mathcal{F}_l(\mathcal{H})$, $\mathcal{F}_r(\mathcal{H})$, $\mathcal{SF}(\mathcal{H})$ で表す．

定義より

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \mathcal{F}_l(\mathcal{H}) \cap \mathcal{F}_r(\mathcal{H}), \quad \mathcal{SF}(\mathcal{H}) = \mathcal{F}_l(\mathcal{H}) \cup \mathcal{F}_r(\mathcal{H}).$$

定義 6.1.3 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする．

(1) A の**本質的スペクトル** $\sigma_{\mathrm{e}}(A)$ を

$$\sigma_{\mathrm{e}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \pi(\lambda I - A) \text{ が } \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H}) \text{ で可逆でない}\}$$

と定める．つまり

$$\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{e}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})\}. \tag{6.1}$$

(2) A の**ワイル・スペクトル** $\sigma_{\mathrm{W}}(A)$ を

$$\sigma_{\mathrm{W}}(A) = \bigcap \{\sigma(A+K) : K \in \mathcal{C}(\mathcal{H})\} \tag{6.2}$$

と定める．

命題 6.1.4 (1) $A \in \mathcal{F}_l(\mathcal{H}) \iff A^* \in \mathcal{F}_r(\mathcal{H})$.

(2) $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H}) \iff A^* \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.

(3) $A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H}) \iff A^* \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$.

(4) $A, B \in \mathcal{F}_l(\mathcal{H})$ $[\mathcal{F}_r(\mathcal{H})] \Longrightarrow AB \in \mathcal{F}_l(\mathcal{H})$ $[\mathcal{F}_r(\mathcal{H})]$.

(5) $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{H}) \Longrightarrow AB \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.

証明 (1)

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{F}_l(\mathcal{H}) &\iff \pi(A) \text{ が } \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H}) \text{ で左可逆} \\ &\iff \pi(A^*) = \pi(A)^* \text{ が } \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H}) \text{ で右可逆} \\ &\iff A^* \in \mathcal{F}_r(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

(2), (3) は (1) より明らか．

(4) $\pi(A), \pi(B)$ が $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ で左 [右] 可逆ならば，$\pi(AB) = \pi(A)\pi(B)$ も左 [右] 可逆である．(5) も同様． ■

次の命題は左フレドホルム作用素の特徴づけを与える．

命題 6.1.5 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について次は同値：

(i) $A \in \mathcal{F}_l(\mathcal{H})$;

(ii) $\operatorname{ran} A$ が閉，かつ $\ker A$ が有限次元；

(iii) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が ONS のとき $\liminf_{n\to\infty} \|Ax_n\| > 0$;

(iv) スペクトル分解 $|A| = \int_0^{\infty} \lambda dE(\lambda)$ をとると，$\lambda > 0$ が存在して $\operatorname{ran} E([0,\lambda))$ が有限次元；

(v) 任意の $K \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ に対して $\ker(A+K)$ が有限次元．

証明　(i) $\Longrightarrow$ (ii). $A \in \mathcal{F}_l(\mathcal{H})$ とすると，$B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ と $K \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ が存在して $BA = I - K$. このとき $\ker A \subset \ker BA = \ker(I-K)$. 定理 4.1.7 より $\ker(I-K)$ が有限次元だから，$\ker A$ は有限次元となる．他方

$$\operatorname{ran} A = A(\ker BA)^{\perp} + A(\ker BA).$$

$A(\ker BA)$ は有限次元である．定理 4.1.6 より $\operatorname{ran} BA = \operatorname{ran}(I-K)$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間だから，それ自身ヒルベルト空間になる．$BA|(\ker BA)^{\perp}$: $(\ker BA)^{\perp} \to \operatorname{ran} BA$ は全単射だから，系 1.3.6 より有界な逆作用素をもつ．よって $\alpha > 0$ がとれて $||BAx|| \geq \alpha ||x||$ $(x \in (\ker BA)^{\perp})$. したがって

$$||Ax|| \geq \frac{\alpha}{||B||}||x||, \qquad x \in (\ker BA)^{\perp}.$$

これより $A(\ker BA)^{\perp}$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間である．ゆえに命題 1.2.8 (2) より $\operatorname{ran} A$ は閉集合となる．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). $A|(\ker A)^{\perp} : (\ker A)^{\perp} \to \operatorname{ran} A$ は全単射だから，系 1.3.6 より逆作用素 $B : \operatorname{ran} A \to (\ker A)^{\perp}$ が存在する．$(\operatorname{ran} A)^{\perp}$ 上で 0 とおいて B を $\mathcal{H}$ 全体に線型拡張すると，$B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ で $BAx = x$ $(x \in (\ker A)^{\perp})$. よって $P = BA$ は $(\ker A)^{\perp}$ 上への射影作用素となる．$\ker A$ の CONS $\{e_i\}_{i=1}^N$ をとると $I - P = \sum_{i=1}^N e_i \otimes e_i$. 任意の ONS $\{x_n\}$ に対して

$$||(I-P)x_n||^2 = \left|\left|\sum_{i=1}^N \langle x_n, e_i\rangle e_i\right|\right|^2 = \sum_{i=1}^N |\langle x_n, e_i\rangle|^2 \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

したがって

$$||B||^2||Ax_n||^2 \geq ||BAx_n||^2 = ||Px_n||^2 = 1 - ||(I-P)x_n||^2 \to 1$$

となるから，$\liminf_{n\to\infty} ||Ax_n|| \geq ||B||^{-1} > 0$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). $|A| = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda)$ とし，任意の $\lambda > 0$ に対して $E([0,\lambda))\mathcal{H}$ が無限次元とする．このとき

$$\begin{aligned}
x_1 &\in E([0,1))\mathcal{H}, \quad ||x_1|| = 1, \\
x_2 &\in E([0,1/2))\mathcal{H} \cap \{x_1\}^{\perp}, \quad ||x_2|| = 1, \\
&\vdots \\
x_n &\in E([0,1/n))\mathcal{H} \cap \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}^{\perp}, \quad ||x_n|| = 1, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

のように選べる．$\{x_n\}$ は ONS で

$$||Ax_n||^2 = \langle |A|^2 x_n, x_n\rangle = \int_0^{1/n} \lambda^2 d||E(\lambda)x_n||^2 \le \left(\frac{1}{n}\right)^2 \to 0$$

となり，(iii) に反する．

(iv) $\Longrightarrow$ (i). $|A| = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda)$ とし，ある $\delta > 0$ で $E([0,\delta))\mathcal{H}$ が有限次元とする．$P = E([0,\delta))$ とおいて $\mathcal{M} = (I-P)\mathcal{H} = E([\delta,\infty))\mathcal{H}$ とおくと，$\mathcal{M} = |A|\mathcal{M} \subset \operatorname{ran}|A|$. 極分解 $A = W|A|$ をとると，$W|\mathcal{M} : \mathcal{M} \to W\mathcal{M}$ は等距離作用素．$V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を

$$Vx = \begin{cases} (W|\mathcal{M})^{-1}x, & x \in W\mathcal{M} \\ 0, & x \in (W\mathcal{M})^\perp \end{cases}$$

と定め，$B = (\int_\delta^\infty \lambda^{-1} dE(\lambda))V$ とおく．$x \in \mathcal{M}$ ならば

$$BAx = \left(\int_\delta^\infty \lambda^{-1} dE(\lambda)\right) VW|A|x = \left(\int_\delta^\infty \lambda^{-1} dE(\lambda)\right)|A|x = x.$$

また $x \in \mathcal{M}^\perp$ ならば，$|A|x \in \mathcal{M}^\perp$ だから $BAx = BW|A|x = 0$. よって $BA = I - P$ となる．$P \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ だから $A \in \mathcal{F}_l(\mathcal{H})$.

(i) $\Longrightarrow$ (v). 任意の $K \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ に対して，$\pi(A+K) = \pi(A)$ が左可逆だから，$B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ と $L \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ が存在して $B(A+K) = I - L$. $\ker(A+K) \subset \ker(I-L)$ であり，定理 4.1.7 より $\ker(I-L)$ は有限次元である．ゆえに $\ker(A+K)$ は有限次元．

(v) $\Longrightarrow$ (iii). (iii) を否定すると，ONS $\{x_n\}$ が存在して $\liminf ||Ax_n|| = 0$. $\{x_n\}$ の部分列をとり直せば，$\sum_{n=1}^\infty ||Ax_n|| < +\infty$ とできる．命題 4.1.10(1) より $\sum_{n=1}^\infty ||Ax_n \otimes x_n|| = \sum_{n=1}^\infty ||Ax_n|| < +\infty$ だから，$K = \sum_{n=1}^\infty Ax_n \otimes x_n$ (ノルム収束) が存在して $K \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. $Kx_n = Ax_n$ だから $\{x_n\} \subset \ker(A-K)$. したがって $\ker(A-K)$ は無限次元となり，(v) に反する． ■

系 6.1.6 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, $\mathcal{F}_l(\mathcal{H})$, $\mathcal{F}_r(\mathcal{H})$, $\mathcal{SF}(\mathcal{H})$ はすべて $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の開集合である．

証明 $A \in \mathcal{F}_l(\mathcal{H})$ とする．上の証明 (ii) $\Longrightarrow$ (iii) より，$\alpha > 0$ が存在して，任意の ONS $\{x_n\}$ に対して $\liminf ||Ax_n|| \ge \alpha$ となる．$A' \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $||A' - A|| < \alpha$ ならば，ONS $\{x_n\}$ に対して

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} ||A'x_n|| &\ge \liminf_{n\to\infty} \{||Ax_n|| - ||(A'-A)x_n||\} \\ &\ge \alpha - ||A' - A|| > 0. \end{aligned}$$

よって $A' \in \mathcal{F}_l(\mathcal{H})$. ゆえに $\mathcal{F}_l(\mathcal{H})$ は開集合である．命題 6.1.4 (1) より $\mathcal{F}_r(\mathcal{H})$ も開集合であり，それゆえ $\mathcal{F}(\mathcal{H}), \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ も開集合． ■

系 6.1.7 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする．

(1) $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ は，$\operatorname{ran} A$ が閉で $\ker A, \ker A^*$ がともに有限次元であることと同値である．

(2) $A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ は，$\operatorname{ran} A$ が閉で $\ker A, \ker A^*$ の少なくとも一方が有限次元であることと同値である．

(3) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が正規のとき，$A \in \mathcal{F}(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$.

証明 極分解 $A = W|A|$ をとると $\operatorname{ran} A = W(\operatorname{ran}|A|)$. また $A^* = |A|W^*$ より $\operatorname{ran} A^* = \operatorname{ran}|A|$. したがって，$\operatorname{ran} A$ が閉 $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{ran} A^*$ が閉．命題 6.1.4 より

$$A \in \mathcal{F}(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow A, A^* \in \mathcal{F}_l(\mathcal{H}),$$

$$A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow A \in \mathcal{F}_l(\mathcal{H}) \text{ または } A^* \in \mathcal{F}_l(\mathcal{H}).$$

ゆえに命題 6.1.5 より (1), (2) がいえる．$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が正規ならば，$\ker A = \ker A^*$ だから，(3) は (1), (2) より明らか． ■

上の系より次が得られる．

系 6.1.8 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする．

(1) $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{e}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{ran}(\lambda I - A)$ が閉, $\dim\ker(\lambda I - A) < +\infty$，かつ $\dim[\operatorname{ran}(\lambda I - A)]^\perp < +\infty\}$.

(2) A が正規のとき

$$\begin{aligned}\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{e}}(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{ran}(\lambda I - A) \text{ が閉}, \dim\ker(\lambda I - A) < +\infty\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})\}.\end{aligned}$$

命題 6.1.9 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，$\sigma_{\mathrm{e}}(A)$ および $\sigma_{\mathrm{W}}(A)$ は空でない閉集合であり

$$\sigma_{\mathrm{e}}(A) \subset \sigma_{\mathrm{W}}(A) \subset \sigma(A).$$

証明 $\sigma_{\mathrm{W}}(A) \subset \sigma(A)$ は定義 (6.2) より明らか．$\lambda I - A$ が可逆ならば，$\pi(\lambda I - A)$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ で可逆である．よって $\sigma_{\mathrm{e}}(A) \subset \sigma(A)$. 任意の $K \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ に対して，$\pi(A) = \pi(A+K)$ より $\sigma_{\mathrm{e}}(A) = \sigma_{\mathrm{e}}(A+K) \subset \sigma(A+K)$.

したがって $\sigma_{\mathrm{e}}(A) \subset \sigma_{\mathrm{W}}(A)$. $\sigma_{\mathrm{W}}(A)$ が閉集合は明らか．系 6.1.6 より $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ は開集合だから，(6.1) より $\sigma_{\mathrm{e}}(A)$ は閉集合である．最後に $\sigma_{\mathrm{e}}(A) \neq \emptyset$ を示す．補題 6.1.1 より $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ は単位元をもつバナッハ環である．$\sigma_{\mathrm{e}}(A)$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ における $\pi(A)$ のスペクトルを意味する．ゆえに，付録の A.5 節で述べてあるように，3.1 節の補題 3.1.1 から定理 3.1.8 までの議論が $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ に置き換えてそのまま成立し，$\sigma_{\mathrm{e}}(A) \neq \emptyset$ がいえる．(バナッハ環の議論を使うと，$\mathcal{F}(\mathcal{H})$ が開集合であることは簡単にわかる．実際，$\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ の可逆な元の全体を $\mathcal{G}$ とおくと，$\mathcal{G}$ が開集合で π がノルム連続だから，$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \pi^{-1}(\mathcal{G})$ は開集合となる.) ■

定義 6.1.10 $A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ に対して

$$\operatorname{ind} A = \dim\ker A - \dim\ker A^*$$

と定義し，$\operatorname{ind} A$ を A の**フレドホルム指数**または単に**指数**という．系 6.1.7 (2) より，$\operatorname{ind} A$ は $\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ の元として確定する．

命題 6.1.11 (1) 任意の $A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ に対して $\operatorname{ind} A = -\operatorname{ind} A^*$.

(2) $A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ が正規ならば，$A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ で $\operatorname{ind} A = 0$.

(3) $A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ について，$\operatorname{ind} A \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.

証明 (1) は明らか．

(2) $A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ が正規とする．$A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ は既に系 6.1.7 (3) で述べた通り．$\operatorname{ind} A = 0$ も $\ker A = \ker A^*$ より明らか．

(3) 系 6.1.7 より明らか． ■

定理 6.1.12 $A, B \in \mathcal{F}_l(\mathcal{H})$ [または $\mathcal{F}_r(\mathcal{H})$] のとき

$$\operatorname{ind} AB = \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} B. \tag{6.3}$$

証明 $A, B \in \mathcal{F}_l(\mathcal{H})$ のとき，命題 6.1.4 (4) より $AB \in \mathcal{F}_l(\mathcal{H})$. $\operatorname{ind} AB = -\infty$ とすると，$AB \in \mathcal{F}_l(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{F}(\mathcal{H})$ だから A または B が $\mathcal{F}_l(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{F}(\mathcal{H})$ に属する．よって $\operatorname{ind} AB = -\infty = \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} B$. $\operatorname{ind} AB \in \mathbb{Z}$ とすると，命題 6.1.11 (3) より $AB \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ で $\pi(A)\pi(B)$ は可逆だから，$\pi(A)$ は右可逆となる．よって $\pi(A)$ は可逆となり，それゆえ $\pi(B)$ も可逆となる．つまり $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. 以下，$A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ として (6.3) を示す．そのためには，

$\mathcal{M} = \ker A \ominus (\ker A \cap \operatorname{ran} B) = \ker A \cap (\ker A \cap \operatorname{ran} B)^{\perp}$ とおいて，次の $1°$–$4°$ を示せばよい：

$1°$ $\dim\ker AB = \dim\ker B + \dim(\ker A \cap \operatorname{ran} B)$,

$2°$ $\dim\ker A = \dim\mathcal{M} + \dim(\ker A \cap \operatorname{ran} B)$,

$3°$ $\dim\ker B^* = \dim\mathcal{M} + \dim(\mathcal{M}^{\perp} \cap \ker B^*)$,

$4°$ $\dim\ker(AB)^* = \dim\ker A^* + \dim(\mathcal{M}^{\perp} \cap \ker B^*)$.

実際このとき

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind} AB &= \dim\ker AB - \dim\ker(AB)^* \\
&= \dim\ker B + \dim(\ker A \cap \operatorname{ran} B) \\
&\qquad -\dim\ker A^* - \dim(\mathcal{M}^{\perp} \cap \ker B^*) \\
&= \dim\ker B + \dim\ker A - \dim\mathcal{M} \\
&\qquad -\dim\ker A^* - \dim(\mathcal{M}^{\perp} \cap \ker B^*) \\
&= \operatorname{ind} A + \dim\ker B - \dim\ker B^* \\
&= \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} B.
\end{aligned}$$

$1°$ の証明．$\ker B \subset \ker AB$, $B(\ker AB) = \ker A \cap \operatorname{ran} B$ だから，$B|\ker AB$ が線型空間としての同型 $\ker AB/\ker B \cong \ker A \cap \operatorname{ran} B$ を引き起こす．よって

$$\dim\ker AB - \dim\ker B = \dim(\ker AB/\ker B) = \dim(\ker A \cap \operatorname{ran} B)$$

となり $1°$ が成立．

$2°$ は $\mathcal{M}$ の定義より明らか．

$3°$ の証明．$\dim\mathcal{M} < +\infty$ だから，命題 1.2.8 (2) より $\mathcal{M} + \operatorname{ran} B$ は閉部分空間．直交分解

$$(\operatorname{ran} B)^{\perp} = (\mathcal{M} + \operatorname{ran} B)^{\perp} \oplus [(\mathcal{M} + \operatorname{ran} B) \ominus \operatorname{ran} B]$$

を考えると

$$\dim(\operatorname{ran} B)^{\perp} = \dim(\mathcal{M} + \operatorname{ran} B)^{\perp} + \dim[(\mathcal{M} + \operatorname{ran} B) \ominus \operatorname{ran} B].$$

$\mathcal{M} \cap \operatorname{ran} B = \{0\}$ より $\dim[(\mathcal{M} + \operatorname{ran} B) \ominus \operatorname{ran} B] = \dim\mathcal{M}$. $(\operatorname{ran} B)^{\perp} = \ker B^*$ と合わせて $3°$ が得られる．

4° の証明．$z \in A(\operatorname{ran} B) \cap A((\mathcal{M} + \operatorname{ran} B)^\perp)$ とすると，$z = Ax = Ay$ $(x \in \operatorname{ran} B,\ y \in (\mathcal{M} + \operatorname{ran} B)^\perp)$. $A(x - y) = 0$ より

$$x - y \in \ker A = \mathcal{M} \oplus (\ker A \cap \operatorname{ran} B) \subset \mathcal{M} + \operatorname{ran} B$$

となるから，$\langle x - y, y\rangle = 0$. よって $\langle y, y\rangle = \langle x, y\rangle = 0$ となり $y = 0$, $z = 0$. したがって $A(\operatorname{ran} B) \cap A((\mathcal{M} + \operatorname{ran} B)^\perp) = \{0\}$. さらに，$\mathcal{M} \subset \ker A$ より

$$\begin{aligned} \operatorname{ran} A &= A(\mathcal{M} + \operatorname{ran} B) + A((\mathcal{M} + \operatorname{ran} B)^\perp) \\ &= A(\operatorname{ran} B) + A((\mathcal{M} + \operatorname{ran} B)^\perp). \end{aligned}$$

ここで，$(\mathcal{M} + \operatorname{ran} B)^\perp \subset \ker B^*$ だから $A((\mathcal{M} + \operatorname{ran} B)^\perp)$ は有限次元であり，$A(\operatorname{ran} B) = \operatorname{ran} AB$ は閉部分空間である．ゆえに

$$\dim(\operatorname{ran} A \ominus \operatorname{ran} AB) = \dim(\operatorname{ran} A / \operatorname{ran} AB) = \dim A((\mathcal{M} + \operatorname{ran} B)^\perp).$$

直交分解

$$(\operatorname{ran} AB)^\perp = (\operatorname{ran} A)^\perp \oplus (\operatorname{ran} A \ominus \operatorname{ran} AB)$$

を考えると

$$\dim(\operatorname{ran} AB)^\perp = \dim(\operatorname{ran} A)^\perp + \dim A((\mathcal{M} + \operatorname{ran} B)^\perp).$$

ところで，$\mathcal{M}^\perp = (\ker A)^\perp \oplus (\ker A \cap \operatorname{ran} B)$ だから

$$(\mathcal{M} + \operatorname{ran} B)^\perp = [(\ker A)^\perp \oplus (\ker A \cap \operatorname{ran} B)] \cap (\operatorname{ran} B)^\perp$$

であるから，$z \in (\mathcal{M} + \operatorname{ran} B)^\perp$ は $z = x + y$ $(x \in (\ker A)^\perp, y \in \ker A \cap \operatorname{ran} B)$ と表せる．$Az = 0$ とすると，$Ay = 0$ より $Ax = 0$ となり $x = 0$. よって $z = y \in \operatorname{ran} B \cap (\operatorname{ran} B)^\perp$ となり $z = 0$. よって $A|(\mathcal{M} + \operatorname{ran} B)^\perp$ は単射であり，$\dim A((\mathcal{M} + \operatorname{ran} B)^\perp) = \dim(\mathcal{M} + \operatorname{ran} B)^\perp$. ゆえに 4° が成立． ■

$A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ とするとき，$\operatorname{ran} A$ は閉で，$A_0 = A|(\ker A)^\perp : (\ker A)^\perp \to \operatorname{ran} A$ は全単射である．よって系 1.3.6 より A_0 は有界な逆作用素 $A_0^{-1} : \operatorname{ran} A \to (\ker A)^\perp$ をもつ．$(\operatorname{ran} A)^\perp$ 上で 0 とおいて A_0^{-1} を $\mathcal{H}$ 全体に拡張した作用素を $A^{[-1]}$ で表す．$\ker A^{[-1]} = (\operatorname{ran} A)^\perp$ かつ $(\operatorname{ran} A^{[-1]})^\perp = \ker A$ だから，$A^{[-1]} \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$, $\operatorname{ind} A^{[-1]} = -\operatorname{ind} A$ である．また，$A^{[-1]}A$ が $(\ker A)^\perp$ 上への射影となる．ここで，$\gamma(A) = \|A^{[-1]}\|^{-1}$ とおく．

補題 6.1.13　任意の $A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ に対して

$$\gamma(A^*) = \gamma(A) = \inf\{||Ax|| : x \in (\ker A)^\perp,\ ||x|| = 1\}.$$

証明　上の A_0 を用いて

$$\begin{aligned}\gamma(A)^{-1} = ||A_0^{-1}|| &= \sup\left\{\frac{||A_0^{-1}y||}{||y||} : y \in \operatorname{ran} A,\ y \neq 0\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{||x||}{||A_0 x||} : x \in (\ker A)^\perp,\ x \neq 0\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{1}{||Ax||} : x \in (\ker A)^\perp,\ ||x|| = 1\right\}.\end{aligned}$$

よって 2 番目の等式を得る．$A^*|(\ker A^*)^\perp : (\ker A^*)^\perp = \operatorname{ran} A \to \operatorname{ran} A^* = (\ker A)^\perp$ は共役作用素 A_0^* (補題 2.3.10) と一致する．$(A_0^*)^{-1} = (A_0^{-1})^*$ だから，$\gamma(A^*)^{-1} = ||(A_0^{-1})^*|| = ||A_0^{-1}|| = \gamma(A)^{-1}$.　■

命題 6.1.14　$A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする．$||B|| < \gamma(A)$ ならば $A+B \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ で次が成立：

$$\dim\ker(A+B) \leq \dim\ker A, \tag{6.4}$$

$$\dim\ker(A+B)^* \leq \dim\ker A^*. \tag{6.5}$$

証明　$\dim\ker(A+B) > \dim\ker A$ とすると，$x \in \ker(A+B)$ で $||x|| = 1$, $x \in (\ker A)^\perp$ となるものが存在する．このとき，補題 6.1.13 と $Ax = -Bx$ より

$$\gamma(A) \leq ||Ax|| = ||Bx|| \leq ||B||$$

となり矛盾．よって (6.4) が成立．$||B^*|| = ||B|| < \gamma(A) = \gamma(A^*)$ だから，(6.5) も成立．$A \in \mathcal{F}_l(\mathcal{H})$ のとき，$\dim\ker A < +\infty$ で $A^{[-1]}A = P_{(\ker A)^\perp}$ だから，$\pi(A^{[-1]})\pi(A) = \pi(I)$. よって $\pi(A^{[-1]})\pi(A+B) = \pi(I) + \pi(A^{[-1]}B)$. さらに $||\pi(A^{[-1]}B)|| \leq ||A^{[-1]}||\,||B|| < 1$. 補題 3.1.1 がバナッハ環 $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ でも成立するから，$\pi(A^{[-1]})\pi(A+B)$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ で可逆となり，それゆえ $\pi(A+B)$ は左可逆である．ゆえに $A+B \in \mathcal{F}_l(\mathcal{H})$. $A \in \mathcal{F}_r(\mathcal{H})$ のときは，命題 6.1.4 (1) を使えばよい．　■

以下，この節の主定理の証明のために，いくつかの補題を準備する．

補題 6.1.15 $A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$, $\ker A = \{0\}$ とし，$B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする．$\|B\| < \gamma(A)$ ならば，$\ker(A+B) = \{0\}$ で $\operatorname{ind}(A+B) = \operatorname{ind} A$.

証明 前命題より $A+B \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$, $\ker(A+B) = \{0\}$. $A^{[-1]}A = I$ より $A^{[-1]}(A+B) = I + A^{[-1]}B$. さらに $\|A^{[-1]}B\| < 1$ だから，$A^{[-1]}(A+B)$ は可逆である．$\dim\ker A^* = +\infty$ のとき，$\dim\ker(A+B)^* < +\infty$, i.e. $A+B \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ と仮定すると，定理 6.1.12 より

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{ind}(A^{[-1]}(A+B)) &= \operatorname{ind} A^{[-1]} + \operatorname{ind}(A+B) \\ &= -\operatorname{ind} A + \operatorname{ind}(A+B) = -\infty \end{aligned}$$

となり矛盾．よって $\dim\ker(A+B)^* = +\infty$ となり $\operatorname{ind}(A+B) = \operatorname{ind} A = -\infty$. 次に $\dim\ker A^* < +\infty$ のとき，$A^{[-1]} \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ だから，再び定理 6.1.12 より

$$0 = \operatorname{ind}(A^{[-1]}(A+B)) = \operatorname{ind} A^{[-1]} + \operatorname{ind}(A+B).$$

したがって $\operatorname{ind}(A+B) = -\operatorname{ind} A^{[-1]} = \operatorname{ind} A$. ■

補題 6.1.16 $A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$, $\operatorname{ind} A \leq 0$ ならば，有限階の作用素 $F \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\mathcal{H})$ が存在して $\ker(A+F) = \{0\}$ かつ $\operatorname{ind}(A+F) = \operatorname{ind} A$.

証明 仮定より $\dim\ker A < +\infty$ で $\dim\ker A \leq \dim\ker A^*$. このとき，初期空間が $\ker A$ で終空間が $\ker A^* = (\operatorname{ran} A)^\perp$ の部分空間である有限階の部分等距離作用素 F がとれる．$x \in \ker(A+F)$ とすると，$Ax = -Fx$ より $Ax \in \operatorname{ran} A \cap (\operatorname{ran} A)^\perp = \{0\}$. よって $x \in \ker A$ かつ $Fx = 0$ となるから，$x = 0$ がいえる．ゆえに $\ker(A+F) = \{0\}$. また，$x \in \ker(A+F)^*$ とすると，$A^*x = -F^*x \in \operatorname{ran} A^* \cap \ker A = \{0\}$. よって $x \in \ker A^* \cap \ker F^*$. したがって

$$\ker(A+F)^* = \ker A^* \cap \ker F^* = \ker A^* \ominus \operatorname{ran} F$$

となるから

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(A+F) &= -\dim\ker(A+F)^* = -(\dim\ker A^* - \dim\operatorname{ran} F) \\ &= -(\dim\ker A^* - \dim\ker A) = \operatorname{ind} A. \quad ■ \end{aligned}$$

補題 6.1.17　$A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$, $F \in \mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ ならば $\mathrm{ind}(A+F) = \mathrm{ind}\, A$.

証明　A, F をそれぞれ A^*, F^* で置き換えてよいから，$\mathrm{ind}\, A \le 0$ として一般性を失わない．このとき補題 6.1.16 より，$G \in \mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ が存在して $\ker(A+G) = \{0\}$, $\mathrm{ind}(A+G) = \mathrm{ind}\, A$. よって A, F をそれぞれ $A+G, F-G$ に置き換えて証明できるから，$\ker A = \{0\}$ としてよい．$\dim\ker A^* = +\infty$ ならば，$\dim[\ker A^* \cap (\mathrm{ran}\, F)^\perp] = +\infty$ で

$$\ker(A+F)^* \supset \ker A^* \cap \ker F^* = \ker A^* \cap (\mathrm{ran}\, F)^\perp$$

だから，$\mathrm{ind}(A+F) = \mathrm{ind}\, A = -\infty$. $\dim\ker A^* < +\infty$ とすると，$A^{[-1]} \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ で $\mathrm{ind}\, A = -\mathrm{ind}\, A^{[-1]}$. 定理 6.1.12 と $A^{[-1]}A = I$ より

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}(A+F) &= \mathrm{ind}(A^{[-1]}(A+F)) - \mathrm{ind}\, A^{[-1]} \\ &= \mathrm{ind}(I + A^{[-1]}F) + \mathrm{ind}\, A. \end{aligned}$$

ゆえに，$F \in \mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ に対して $\mathrm{ind}(I+F) = 0$ を示せば十分であるが，これは定理 4.1.8 (3) で $\lambda = 1$ とすればよい．■

準備ができたので，次の主定理を証明しよう．

定理 6.1.18　(1) $\mathrm{ind} : \mathcal{SF}(\mathcal{H}) \to \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ はノルム連続である．ただし，$\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ の位相は離散位相とする．

(2) 任意の $A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ と $K \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ に対して $\mathrm{ind}(A+K) = \mathrm{ind}\, A$.

証明　(1) $A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$, $\mathrm{ind}\, A \le 0$ とする．補題 6.1.16 より $F \in \mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ が存在して $\ker(A+F) = \{0\}$, $\mathrm{ind}(A+F) = \mathrm{ind}\, A$. $B \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ が $\|B-A\| < \delta = \gamma(A+F)$ ならば，補題 6.1.15 より $\mathrm{ind}(B+F) = \mathrm{ind}(A+F)$. ところが，補題 6.1.17 より $\mathrm{ind}(B+F) = \mathrm{ind}\, B$. ゆえに，$B \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ について，$\|B-A\| < \delta \Longrightarrow \mathrm{ind}\, B = \mathrm{ind}\, A$ であるから，ind は A で連続となる．$\mathrm{ind}\, A \ge 0$ のときは，$A \mapsto A^* \mapsto \mathrm{ind}\, A^* = -\mathrm{ind}\, A$ と考えればよい．

(2) $K \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ ならば，命題 4.1.2 より $\{F_n\} \subset \mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ が存在して $\|K - F_n\| \to 0$. 補題 6.1.17 と (1) より，$\mathrm{ind}\, A = \mathrm{ind}(A+F_n) \to \mathrm{ind}(A+K)$. よって $\mathrm{ind}(A+K) = \mathrm{ind}\, A$.　■

次の定理は $\sigma_{\mathrm{e}}(A)$ と $\sigma_{\mathrm{W}}(A)$ の間のずれを明らかにする．(なお，命題 6.3.14 も参照.)

定理 6.1.19 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{W}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \in \mathcal{F}(\mathcal{H}),\ \mathrm{ind}(\lambda I - A) = 0\}, \tag{6.6}$$

$$\sigma_{\mathrm{W}}(A) \setminus \sigma_{\mathrm{e}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \in \mathcal{F}(\mathcal{H}),\ \mathrm{ind}(\lambda I - A) \neq 0\}. \tag{6.7}$$

証明 (6.7) は (6.1) と (6.6) より明らか．(6.6) を示す．$\lambda \notin \sigma_{\mathrm{W}}(A)$ とする．命題 6.1.9 より $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{e}}(A)$ だから，(6.1) より $\lambda I - A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. (6.2) より，$K \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ が存在して $\lambda \notin \sigma(A+K)$. よって定理 6.1.18 (2) より $\mathrm{ind}(\lambda I - A) = \mathrm{ind}(\lambda I - A - K) = 0$. 逆に，$\lambda I - A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ かつ $\mathrm{ind}(\lambda I - A) = 0$ とする．補題 6.1.16 より，$F \in \mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ が存在して $\ker(\lambda I - A - F) = \{0\}$, $\mathrm{ind}(\lambda I - A - F) = 0$. このとき，$\ker(\lambda I - A - F)^* = \{0\}$ となり $\mathrm{ran}(\lambda I - A - F) = \mathcal{H}$. よって $\lambda I - A - F$ が可逆となり $\lambda \notin \sigma(A+F)$. したがって $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{W}}(A)$. ■

系 6.1.20 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が正規ならば $\sigma_{\mathrm{e}}(A) = \sigma_{\mathrm{W}}(A)$.

証明 A が正規ならば $\lambda I - A$ も正規だから，$\lambda I - A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ のとき $\mathrm{ind}(\lambda I - A) = 0$. よって定理 6.1.19 より結論を得る．■

例 6.1.21 例 2.1.18 で与えた $\mathcal{H} = \ell^2$ 上の片側シフト作用素 V について，次が成立．

(1) $|\lambda| = 1 \Longrightarrow \lambda I - V \notin \mathcal{SF}(\mathcal{H})$.

(2) $|\lambda| < 1 \Longrightarrow \lambda I - V \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$, $\mathrm{ind}(\lambda I - V) = -1$.

(3) $\sigma_{\mathrm{e}}(V) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$, $\sigma_{\mathrm{W}}(V) = \sigma(V) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$.

証明 (1) $|\lambda| = 1$ のとき，例 3.1.21 より $\lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(V)$ であるから，$\mathrm{ran}(\lambda I - V)$ は閉でない．よって $\lambda I - V \notin \mathcal{SF}(\mathcal{H})$.

(2) $|\lambda| < 1$ のとき，例 3.1.21 より $\lambda \in \sigma_{\mathrm{r}}(V)$, $\overline{\lambda} \in \sigma_{\mathrm{p}}(V^*)$. よって $\ker(\lambda I - V) = \{0\}$, $\ker(\lambda I - V)^* \neq \{0\}$. $x = (\xi_n) \in \ker(\lambda I - V)^*$ とすると，$V^* x = \overline{\lambda} x$ より $x = (\xi_1, \overline{\lambda}\xi_1, \overline{\lambda}^2 \xi_1, \ldots)$. したがって $\dim \ker(\lambda I - V)^* = 1$. さらに，$\|(V - \lambda I)x\| \geq (1 - |\lambda|)\|x\|$ $(x \in \mathcal{H})$ だから，$\mathrm{ran}(\lambda I - V)$ は閉．ゆえに $\lambda I - V \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$, $\mathrm{ind}(\lambda I - V) = -1$.

(3) (1), (2) と (6.1), (6.6) より明らか．■

この節の最後に，$\mathcal{SF}(\mathcal{H})$ の連結成分を決定しよう．

補題 6.1.22　$A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$, $\operatorname{ind} A = 0$ のとき，$\phi(0) = I$, $\phi(1) = A$ となる連続曲線 $\phi : [0,1] \to \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ が存在する．

証明　補題 6.1.16 より $F \in \mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ が存在して $\ker(A+F) = \{0\}$, $\operatorname{ind}(A+F) = 0$. よって $A+F$ は可逆．A と $A+F$ は連続曲線 $\eta(t) = A + tF$ $(0 \le t \le 1)$ で結ばれるから，A が可逆としてよい．このとき，極分解 $A = U|A|$ をとれば，U はユニタリーで $|A|$ は可逆である．定理 3.2.22 より自己共役な $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ がとれて $U = e^{iH}$ と表される．ゆえに，$\phi(t) = e^{itH}|A|^t$ $(0 \le t \le 1)$ により連続な $\phi : [0,1] \to \mathcal{G}$ が定まり $\phi(0) = I$, $\phi(1) = A$.　■

定理 6.1.23　$\mathcal{H}$ が可算次元とする．$A, B \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ について，A, B が $\mathcal{SF}(\mathcal{H})$ の同じ連結成分に属するための必要十分条件は $\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} B$. つまり，$\mathcal{SF}(\mathcal{H})$ の連結成分は $\{A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H}) : \operatorname{ind} A = n\}$ $(n \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})$.

証明　必要性は定理 6.1.18 (1) より明らかだから，十分性を示せばよい．まず，$\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} B \in \mathbb{Z}$ とする．このとき $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. $CA = I - K$ となる $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $K \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ をとると，$C \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ で $\operatorname{ind} C = -\operatorname{ind} A = -\operatorname{ind} B$. よって $\operatorname{ind} BC = 0$. 前補題より，連続な $\phi : [0,1] \to \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ がとれて $\phi(0) = I$, $\phi(1) = BC$. $\eta(t) = \phi(t)A + tBK$ $(0 \le t \le 1)$ により連続な $\eta : [0,1] \to \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ が定まり，$\eta(0) = A$, $\eta(1) = B(CA + K) = B$. (この証明より，$A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ のときは，$\dim \mathcal{H} = \aleph_0$ の仮定は必要でない.)

次に，$\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} B = -\infty$ とする．補題 6.1.16 より $F \in \mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ が存在して $\ker(A+F) = \{0\}$. 連続曲線 $A + tF$ $(0 \le t \le 1)$ をとれば，$\ker A = \{0\}$ としてよい．同様に $\ker B = \{0\}$ としてよい．極分解 $A = V|A|$ をとると，$|A|$ は可逆で，V は $\dim(\operatorname{ran} V)^\perp = +\infty$ の等距離作用素．連続曲線 $|A|^t$ $(0 \le t \le 1)$ により I と $|A|$ が結ばれる．よって V と A は $\mathcal{SF}(\mathcal{H})$ 内の連続曲線で結ばれる．同じく極分解 $B = W|B|$ をとると，W は $\dim(\operatorname{ran} W)^\perp = +\infty$ の等距離作用素であり，W と B が連続曲線で結ばれる．$(\operatorname{ran} V)^\perp, (\operatorname{ran} W)^\perp$ がともに可算次元だから，$UVx = Wx$ $(x \in \mathcal{H})$ かつ $U(\operatorname{ran} V)^\perp = (\operatorname{ran} W)^\perp$ であるユニタリー作用素 U がとれる．自己共役な H で $U = e^{iH}$ と表すと，連続曲線 e^{itH} $(0 \le t \le 1)$ により I と U が結ばれる．$UV = W$ だから，V と W は $\mathcal{SF}(\mathcal{H})$ 内の連続曲線で結ばれる．ゆえに A と B は同じ連結成分に属する．$\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} B = +\infty$ のときは，A^*, B^* に上の議論を適用すればよい．　■

$\pi(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ の可逆元の全体である．定理 6.1.18 (2) より $[\mathrm{ind}] : \pi(\mathcal{F}(\mathcal{H})) \to \mathbb{Z}$ を $[\mathrm{ind}](\pi(A)) = \mathrm{ind}(A)$ $(A \in \mathcal{F}(\mathcal{H}))$ と定義できる．このとき，定理 6.1.12 より [ind] は群準同型であり，値域は $\mathbb{Z}$ 全体になる．さらに，定理 6.1.23 より $\ker[\mathrm{ind}] = \pi(\mathcal{F}_0(\mathcal{H}))$. ここで $\mathcal{F}_0(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{F}(\mathcal{H}) : \mathrm{ind}\, A = 0\}$. ゆえに $\pi(\mathcal{F}_0(\mathcal{H}))$ は $\pi(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ の正規部分群で $\pi(\mathcal{F}(\mathcal{H}))/\pi(\mathcal{F}_0(\mathcal{H})) \cong \mathbb{Z}$ が成立する．

この節のフレドホルム理論では，コンパクト作用素の摂動で保存される性質，つまり $A - B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ となる $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について同じである性質を問題にした．このような作用素の性質は，カルキン環 $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ を使って定式化されることが多い．この種の理論でとりわけ有名なものとして，**BDF(ブラウン-ダグラス-フィルモア) 理論**が知られている．BDF 理論の主定理は，代数トポロジーの概念が必要になるので，ここで説明することはできない．しかし，この系として得られる作用素論の結果を以下に述べておこう．$\mathcal{H}$ を可分ヒルベルト空間とする．$A^*A - AA^* \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ である $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を**本質的正規**という．

1° 本質的正規作用素 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について，ユニタリー $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在して $UAU^* - B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ となるための必要十分条件は，$\sigma_{\mathrm{e}}(A) = \sigma_{\mathrm{e}}(B)$ かつすべての $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{e}}(A)$ に対して $\mathrm{ind}(\lambda I - A) = \mathrm{ind}(\lambda I - B)$. 特に，$A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が正規のとき，ユニタリー U が存在して $UAU^* - B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ となるための必要十分条件は $\sigma_{\mathrm{e}}(A) = \sigma_{\mathrm{e}}(B)$ (**ワイル-フォン・ノイマン-バーグの定理**).

2° $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が本質的正規のとき，正規作用素 N が存在して $A - N \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ となるための必要十分条件は，すべての $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{e}}(A)$ に対して $\mathrm{ind}(\lambda I - A) = 0$, すなわち $\sigma_{\mathrm{e}}(A) = \sigma_{\mathrm{W}}(A)$ (定理 6.1.19).

3° $\{N + K : N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は正規, $K \in \mathcal{C}(\mathcal{H})\}$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ でノルム閉.

6.2 ダイレーション理論

この節では，Sz. ナジーらによって開発されたダイレーション理論を解説する．この理論は，それ自身として興味あるばかりでなく，作用素論においてしばしば強力な道具となるものである．

定義 6.2.1　$||A|| \leq 1$ である $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を**縮小作用素**という．このとき，$A^*A \leq I$, $AA^* \leq I$ だから，$D_A = (I - A^*A)^{1/2}$, $D_{A^*} = (I - AA^*)^{1/2}$ と定義し，これらを**不足作用素**と呼ぶ．

縮小作用素 A について，A が等距離作用素であることは $D_A = 0$ と同値であり，A がユニタリーであることは $D_A = D_{A^*} = 0$ と同値である．また

$$||D_A x||^2 = \langle D_A^2 x, x\rangle = \langle (I - A^*A)x, x\rangle = ||x||^2 - ||Ax||^2$$

だから

$$\ker D_A = \{x \in \mathcal{H} : ||Ax|| = ||x||\}. \tag{6.8}$$

よって (6.8) の右辺は $\mathcal{H}$ の閉部分空間となる．

ユニタリー・ダイレーションの説明に入る前に，縮小作用素，特に等距離作用素の構造について明らかにしよう．まず，以下で必要ないくつかの定義を与える．

定義 6.2.2　(1) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ と $A_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ が**ユニタリー同値**であるとは，ユニタリー作用素 (i.e. 等距離同型写像) $\Gamma : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ が存在して $\Gamma A \Gamma^{-1} = A_1$ となるときをいう．このとき，$x \in \mathcal{H}$ と $\Gamma x \in \mathcal{H}_1$ を同一視して，A と A_1 を同じ作用素とみなせる．

(2) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とし，$\mathcal{M}$ を $\mathcal{H}$ の閉部分空間とする．$\mathcal{M}$ が A を**約する**とは，$A\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ かつ $A\mathcal{M}^\perp \subset \mathcal{M}^\perp$ のときをいう．$A\mathcal{M}^\perp \subset \mathcal{M}^\perp \Longleftrightarrow A^*\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ に注意する．

(3) 縮小作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について，A を約する閉部分空間 $\mathcal{M}$ で $A|\mathcal{M}$ がユニタリーになるものが $\{0\}$ 以外に存在しないとき，A を**完全非ユニタリー**という．

命題 6.2.3　A が縮小作用素のとき，A を約する $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{H}_0$ が存在して，$A|\mathcal{H}_0$ がユニタリーかつ $A|\mathcal{H}_0^\perp$ が完全非ユニタリーとなる． この閉部分空間 $\mathcal{H}_0$ は一意である．

証明　各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して，縮小作用素 $A^{(n)}$ を

$$A^{(n)} = \begin{cases} A^n, & n > 0 \\ I, & n = 0 \\ (A^*)^{-n}, & n < 0 \end{cases}$$

と定義する．

$$\mathcal{H}_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \{x \in \mathcal{H} : ||A^{(n)}x|| = ||x||\}$$

とおくと，(6.8) より $\mathcal{H}_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \ker D_{A^{(n)}}$ と表されるから，$\mathcal{H}_0$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間である．$x \in \mathcal{H}_0$ とすると，$n \geq 0$ のとき

$$||A^{(n)}Ax|| = ||A^{n+1}x|| = ||x|| = ||Ax||.$$

また

$$\begin{aligned} ||A^*Ax - x||^2 &= ||A^*Ax||^2 - 2\mathrm{Re}\langle A^*Ax, x\rangle + ||x||^2 \\ &\leq 2||x||^2 - 2||Ax||^2 = 0 \end{aligned}$$

だから $A^*Ax = x$. よって $n < 0$ のとき

$$||A^{(n)}Ax|| = ||A^{(n+1)}A^*Ax|| = ||A^{(n+1)}x|| = ||x|| = ||Ax||.$$

したがって $Ax \in \mathcal{H}_0$. $A^*x \in \mathcal{H}_0$ も同様に示せる．ゆえに $\mathcal{H}_0$ は A を約する．そこで $A_0 = A|\mathcal{H}_0, A_1 = A|\mathcal{H}_0^\perp$ とおく．$A_0^* = A^*|\mathcal{H}_0$ だから，任意の $x \in \mathcal{H}_0$ に対して $||A_0x|| = ||Ax|| = ||x||$ かつ $||A_0^*x|| = ||A^*x|| = ||x||$. よって A_0 はユニタリー．次に，閉部分空間 $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}_0^\perp$ が A_1 を約し，$A_1|\mathcal{M} = A|\mathcal{M}$ がユニタリーとする．このとき，$(A|\mathcal{M})^* = A^*|\mathcal{M}$ だから，任意の $x \in \mathcal{M}$ に対して $||A^{(n)}x|| = ||x||$ $(n \in \mathbb{Z})$. よって $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}_0$ となり $\mathcal{M} = \{0\}$. ゆえに A_1 は完全非ユニタリーである．

一意性を示すために，$\mathcal{H}_1$ が A を約する閉部分空間で，$A|\mathcal{H}_1$ がユニタリー，$A|\mathcal{H}_1^\perp$ が完全非ユニタリーとする．$x \in \mathcal{H}_1$ ならば $||A^{(n)}x|| = ||x||$ $(n \in \mathbb{Z})$. よって $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0$. このとき $\mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{H}_1$ は A を約し，$A|\mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{H}_1$ はユニタリーであるから，$\mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{H}_1 = \{0\}$ となり $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1$. ■

ヒルベルト空間の無限列 $\{\mathcal{H}_n\}_{n=1}^\infty$ に対して

$$\bigoplus_{n=1}^\infty \mathcal{H}_n = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathcal{H}_n,\ \sum_{n=1}^\infty ||x_n||^2 < +\infty\right\}$$

は，和 $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$, スカラー倍 $\alpha(x_n) = (\alpha x_n)$, および内積

$$\langle (x_n), (y_n)\rangle = \sum_{n=1}^\infty \langle x_n, y_n\rangle$$

によりヒルベルト空間になる (証明は例 1.1.8(2) と同様にできる). この $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ を $\{\mathcal{H}_n\}$ の**無限直和ヒルベルト空間**という. ヒルベルト空間の両側無限列 $\{\mathcal{H}_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ についても, 同様に $\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{H}_n$ が定義できる. $\mathcal{H}_n$ $(n=1,2,\ldots)$ が $\mathcal{H}$ の互いに直交する閉部分空間で, $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ が $\mathcal{H}$ を生成するとき, $(x_n)\in\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty}x_n\in\mathcal{H}$ を同一視して $\mathcal{H}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ とみなせる.

命題 6.2.4 等距離作用素 $V\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ について次は同値:

(i) V が完全非ユニタリー;

(ii) $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{L}$ が存在して $\mathcal{H}=\bigoplus_{n=0}^{\infty}V^n\mathcal{L}$, すなわち $V^n\mathcal{L}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ が互いに直交し $\bigcup_{n=0}^{\infty}V^n\mathcal{L}$ が $\mathcal{H}$ を生成する.

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii). $\mathcal{H}\supset V\mathcal{H}\supset V^2\mathcal{H}\supset\cdots$ に注意して $\mathcal{H}_0=\bigcap_{n=0}^{\infty}V^n\mathcal{H}$ とおく. $V\mathcal{H}_0=\bigcap_{n=0}^{\infty}V^{n+1}\mathcal{H}=\mathcal{H}_0$, $V^*\mathcal{H}_0=\bigcap_{n=1}^{\infty}V^{n-1}\mathcal{H}=\mathcal{H}_0$ であるから, $\mathcal{H}_0$ は V を約し $V|\mathcal{H}_0$ はユニタリー. よって $\mathcal{H}_0=\{0\}$. $\mathcal{L}=\mathcal{H}\ominus V\mathcal{H}$ とすると, $x\perp V\mathcal{H}\Longleftrightarrow Vx\perp V^2\mathcal{H}$ だから $V\mathcal{L}=V\mathcal{H}\ominus V^2\mathcal{H}$. 同様にして $V^n\mathcal{L}=V^n\mathcal{H}\ominus V^{n+1}\mathcal{H}$ $(n\in\mathbb{N})$. よって $V^n\mathcal{L}$ $(n=0,1,\ldots)$ は互いに直交する. また, $\bigcap_{n=0}^{m}(V^n\mathcal{L})^{\perp}=V^{m+1}\mathcal{H}$ が簡単に確かめられて

$$\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}V^n\mathcal{L}\right)^{\perp}=\bigcap_{n=0}^{\infty}V^n\mathcal{H}=\{0\}.$$

ゆえに $\bigcup_{n=0}^{\infty}V^n\mathcal{L}$ は $\mathcal{H}$ を生成する.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). 閉部分空間 $\mathcal{L}$ が存在して $\mathcal{H}=\bigoplus_{n=0}^{\infty}V^n\mathcal{L}$ とすると, $V\mathcal{H}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}V^n\mathcal{L}$ だから $\mathcal{L}=\mathcal{H}\ominus V\mathcal{H}$. 任意の $y\in\mathcal{L}$ に対して, $\langle V^*y,x\rangle=\langle y,Vx\rangle=0$ $(x\in\mathcal{H})$ であるから $V^*y=0$. 任意の $x\in\mathcal{H}$ を $x=\sum_{n=0}^{\infty}V^ny_n$ $(y_n\in\mathcal{L})$ と表すと, $V^{*m}x=\sum_{n=m}^{\infty}V^{n-m}y_n$ だから

$$||V^{*m}x||^2=\sum_{n=m}^{\infty}||y_n||^2\to 0\ \ (m\to\infty).$$

したがって $V^{*m}\xrightarrow{\text{SOT}}0$. $\mathcal{M}$ が V を約する閉部分空間で, $V|\mathcal{M}$ がユニタリーとすると, $x\in\mathcal{M}$ ならば $||x||=||V^{*m}x||\to 0$ となるから $x=0$. よって $\mathcal{M}=\{0\}$ だから V は完全非ユニタリー. ■

命題 6.2.4 の条件を満たすような等距離作用素 V は (広い意味で) **片側シフト作用素**と呼ばれる. 実際, $\mathcal{H}_1=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}_n$ $(\mathcal{L}_n=\mathcal{L})$ とおいて, Γ :

$\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}$ を $\Gamma(x_0, x_1, x_2, \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} V^n x_n$ と定めると，Γ はユニタリーで $\Gamma^{-1} V \Gamma(x_0, x_1, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots)$ となる．命題 6.2.3, 6.2.4 より，任意の等距離作用素 V が

$$V = (\text{ユニタリー作用素}) \oplus (\text{片側シフト作用素})$$

と一意的に分解できる．これは**ウォルド分解**と呼ばれる．

命題 6.2.5 任意の等距離作用素 $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，$\mathcal{H}$ を含むヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ とユニタリー作用素 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ が存在して，$\mathcal{K} = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} U^n \mathcal{H}$ (極小条件), $U\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$, $V = U|\mathcal{H}$ を満たす．ここで，$\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} U^n \mathcal{H}$ は $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} U^n \mathcal{H}$ で生成される閉部分空間を表す．このような $U \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ は，$\Gamma x = x$ $(x \in \mathcal{H})$ となるユニタリー作用素 Γ によるユニタリー同値を除いて一意である．

証明 $V = V_0 \oplus V_1$ $(\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1)$ をウォルド分解とする．片側シフト作用素 $V_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ は，上で述べたように $\mathcal{H}_1 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$ $(\mathcal{L}_n = \mathcal{L})$, $V_1(x_0, x_1, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots)$ としてよい．$\mathcal{K}_1 = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_n$ $(\mathcal{L}_n = \mathcal{L})$ とおき，$(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{H}_1$ と $(\ldots, 0, 0, x_0, x_1, \ldots) \in \mathcal{K}_1$ を同一視して $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{K}_1$ とみなす．$U_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1)$ を両側シフト作用素，i.e. $U(x_n) = (y_n)$, $y_n = x_{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$ とすると，U_1 はユニタリーで $U_1 \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$, $U_1|\mathcal{H}_1 = V_1$ となる．$\mathcal{K} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{K}_1$ $(\supset \mathcal{H})$, $U = V_0 \oplus U_1$ とおいて，求めるユニタリー作用素が得られる．

一意性を示すために，$U_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1)$ も同じ条件を満たすとする．任意の $N \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathcal{H}$ $(-N \le n \le N)$ に対して

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{n=-N}^{N} U_1^n x_n \Big\| &= \Big\| \sum_{n=0}^{2N} U_1^n x_{n-N} \Big\| = \Big\| \sum_{n=0}^{2N} V^n x_{n-N} \Big\| \\ &= \Big\| \sum_{n=0}^{2N} U^n x_{n-N} \Big\| = \Big\| \sum_{n=-N}^{N} U^n x_n \Big\|.\end{aligned}$$

したがって，$\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} U^n \mathcal{H}$ の線型包から $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} U_1^n \mathcal{H}$ の線型包への等距離写像 Γ を

$$\Gamma\Big(\sum_{n=-N}^{N} U^n x_n \Big) = \sum_{n=-N}^{N} U_1^n x_n, \qquad x_n \in \mathcal{H},\ N \in \mathbb{N}$$

と定めることができる．$\mathcal{K}=\bigvee_{-\infty}^{\infty}U^n\mathcal{H}$, $\mathcal{K}_1=\bigvee_{-\infty}^{\infty}U_1^n\mathcal{H}$ だから，Γ はユニタリー作用素 $\Gamma:\mathcal{K}\to\mathcal{K}_1$ に拡張できる．このとき，$x\in\mathcal{H}$ に対して

$$\Gamma U\Gamma^{-1}(U_1^n x)=\Gamma U(U^n x)=\Gamma(U^{n+1}x)=U_1^{n+1}x=U_1(U_1^n x)$$

であるから，$\Gamma U\Gamma^{-1}=U_1$ が成立する．■

定義 6.2.6　$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする．$\mathcal{K}$ を $\mathcal{H}$ を含むヒルベルト空間とし，$B\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ が

$$A^n=P_{\mathcal{H}}B^n|\mathcal{H}, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

を満たすとき，B を A の**ダイレーション**という．(ダイレーションという言葉は膨張とか拡張を意味する.) 特に B がユニタリー (よって A は縮小作用素) のとき，B を A の**ユニタリー・ダイレーション**という．

定理 6.2.7 (Sz. ナジーのダイレーション)　任意の縮小作用素 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，A のユニタリー・ダイレーション $U\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ で $\mathcal{K}=\bigvee_{n=-\infty}^{\infty}U^n\mathcal{H}$ (極小条件) を満たすものが存在する．このような A の極小ユニタリー・ダイレーションは，$\Gamma x=x$ $(x\in\mathcal{H})$ となるユニタリー作用素 Γ によるユニタリー同値を除いて一意である．

証明　$\mathbf{H}=\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{H}_n$ $(\mathcal{H}_n=\mathcal{H})$ とおき，$x\in\mathcal{H}_0=\mathcal{H}$ と $(\ldots,0,0,x,0,0,\ldots)\in\mathbf{H}$ を同一視して $\mathcal{H}\subset\mathbf{H}$ とみなす．写像 $\mathbf{U}:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$, $(y_n)=\mathbf{U}(x_n)$ を

$$y_n=\begin{cases} x_{n-1}, & n<0 \\ D_{A^*}x_{-1}+Ax_0, & n=0 \\ -A^*x_{-1}+D_Ax_0, & n=1 \\ x_{n-1}, & n>1 \end{cases}$$

と定めると，明らかに $\mathbf{U}\in\mathcal{B}(\mathbf{H})$ である．

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{U}(x_n),(x'_n)\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{-1}\langle x_{n-1},x'_n\rangle+\langle D_{A^*}x_{-1}+Ax_0,x'_0\rangle \\ &\qquad +\langle -A^*x_{-1}+D_Ax_0,x'_1\rangle+\sum_{n=2}^{\infty}\langle x_{n-1},x'_n\rangle \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-2}\langle x_n,x'_{n+1}\rangle+\langle x_{-1},D_{A^*}x'_0-Ax'_1\rangle\end{aligned}$$

$$+\langle x_0, A^*x'_0 + D_A x'_1\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n, x'_{n+1}\rangle$$

であるから，$(z_n) = \mathbf{U}^*(x_n)$ は

$$z_n = \begin{cases} x_{n+1}, & n < -1 \\ D_{A^*}x_0 - Ax_1, & n = -1 \\ A^*x_0 + D_A x_1, & n = 0 \\ x_{n+1}, & n > 0 \end{cases}$$

で与えられる．よって簡単な計算より

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^*\mathbf{U} \;\; &= \;\; (\ldots, x_{-3}, x_{-2}, (AA^* + D_{A^*}^2)x_{-1} + (D_{A^*}A - AD_A)x_0, \\ &\qquad (A^*D_{A^*} - D_A A^*)x_{-1} + (A^*A + D_A^2)x_0, x_1, x_2, \ldots). \end{aligned}$$

ところで

$$A^*A + D_A^2 = I, \quad AA^* + D_{A^*}^2 = I, \tag{6.9}$$

$$AD_A = D_{A^*}A, \quad A^*D_{A^*} = D_A A^*. \tag{6.10}$$

上の (6.10) は補題 5.1.6 (2) による．よって $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = I$. 同様に $\mathbf{U}\mathbf{U}^* = I$ も示せて，$\mathbf{U}$ はユニタリーとなる．任意の $x \in \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} &\mathbf{U}^n(\ldots, 0, 0, x, 0, 0, \ldots) \\ &\quad = (\ldots, 0, 0, A^n x, D_A A^{n-1}x, \ldots, D_A Ax, D_A x, 0, 0, \ldots) \end{aligned}$$

が簡単に確かめられる．ゆえに $P_{\mathcal{H}}\mathbf{U}^n|\mathcal{H} = A^n$ $(n \in \mathbb{N})$. つまり $\mathbf{U}$ は A のユニタリー・ダイレーションである．そこで $\mathcal{K} = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{U}^n\mathcal{H}$ とおくと，$\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ であり $\mathbf{U}\mathcal{K} = \mathcal{K}$. よって $U = \mathbf{U}|\mathcal{K}$ と定義できて，U は A の極小ユニタリー・ダイレーションである．

一意性を示すために，$U_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1)$ も A の極小ユニタリー・ダイレーションとする．任意の $x, y \in \mathcal{H}$ に対して，$n \geq m$ のとき

$$\begin{aligned} \langle U_1^n x, U_1^m y\rangle \;\; &= \;\; \langle U_1^{n-m}x, y\rangle = \langle A^{n-m}x, y\rangle \\ &= \;\; \langle U^{n-m}x, y\rangle = \langle U^n x, U^m y\rangle. \end{aligned}$$

$n < m$ のときでも

$$\langle U_1^n x, U_1^m y\rangle = \langle x, A^{m-n}y\rangle = \langle U^n x, U^m y\rangle.$$

よって任意の $N \in \mathbb{N}, x_n \in \mathcal{H}\ (-N \leq n \leq N)$ に対して，$\|\sum_{n=-N}^{N} U_1^n x_n\| = \|\sum_{n=-N}^{N} U^n x_n\|$ が成立する．後は，命題 6.2.5 の一意性の証明と同じである．■

上の証明で与えた $\mathbf{U}$ は

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \\ & I & & & & \mathbf{0} & \\ & & I & & & & \\ & & & D_{A^*} & A & & \\ & & & -A^* & D_A & & \\ & & & & & I & \\ & \mathbf{0} & & & & & I \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

と行列表示できる．ただし，A が $(0,0)$ 成分の位置にある．また，(6.9), (6.10) は $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 上の作用素 $\begin{bmatrix} D_{A^*} & A \\ -A^* & D_A \end{bmatrix}$ のユニタリー性を意味する．上の表示を使うと，$\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^* = I$ が形式的な行列計算で示せる．

等距離ダイレーションについても，類似の結果が次のように述べられる．

命題 6.2.8　任意の縮小作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，$\mathcal{K}_+ = \bigvee_{n=0}^{\infty} V^n \mathcal{H}$ (極小条件) を満たす等距離作用素 $V \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_+)$ で A のダイレーションであるものが存在する．このような A の極小等距離ダイレーションは，$\Gamma x = x$ $(x \in \mathcal{H})$ となるユニタリー作用素 Γ によるユニタリー同値を除いて一意である．さらに，$AP_{\mathcal{H}} = P_{\mathcal{H}} V$, $V^*\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$, $A^* = V^*|\mathcal{H}$ が成立する．

証明　定理 6.2.7 より A のユニタリー・ダイレーション $U \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ が存在する．$\mathcal{K}_+ = \bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathcal{H}$ とおくと，$\mathcal{K}_+ \supset \mathcal{H}$ で $U\mathcal{K}_+ \subset \mathcal{K}_+$. よって等距離作用素 $V = U|\mathcal{K}_+$ が定義できて，$P_{\mathcal{H}} V^n|\mathcal{H} = P_{\mathcal{H}} U^n|\mathcal{H} = A^n$ $(n \in \mathbb{N})$. 一意性の証明は定理 6.2.7 のときと同様．さらに，任意の $x \in \mathcal{H}$, $n \geq 0$ に対して

$$AP_{\mathcal{H}} V^n x = AA^n x = A^{n+1} x = P_{\mathcal{H}} V^{n+1} x = P_{\mathcal{H}} V V^n x.$$

よって $AP_{\mathcal{H}} = P_{\mathcal{H}} V$. 任意の $x \in \mathcal{H}$ と $y \in \mathcal{K}_+$ に対して

$$\langle A^* x, y \rangle = \langle x, AP_{\mathcal{H}} y \rangle = \langle x, P_{\mathcal{H}} V y \rangle = \langle x, V y \rangle = \langle V^* x, y \rangle.$$

よって $A^*x = V^*x$ だから，$V^*\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$, $A^* = V^*|\mathcal{H}$. ■

縮小作用素 A の極小ユニタリー・ダイレーションを U_A で表すと，次の $1°$–$4°$ は容易：

$1°$ $U_{A^*} = U_A^*$,

$2°$ $A = A_1 \oplus A_2 \Longrightarrow U_A = U_{A_1} \oplus U_{A_2}$,

$3°$ A がユニタリー $\Longrightarrow U_A = A$,

$4°$ $A = A_0 \oplus A_1$ が命題 6.2.3 の分解，すなわち A_0 がユニタリーで A_1 が完全非ユニタリーとすると，$U_A = A_0 \oplus U_{A_1}$.

ユニタリー・ダイレーションを応用すると，フォン・ノイマンによって証明された有名な不等式を簡単に示すことができる．

系 6.2.9 (フォン・ノイマンの不等式) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が縮小作用素のとき，任意の多項式 $p(\zeta)$ に対して

$$||p(A)|| \leq \max\{|p(\zeta)| : \zeta \in \mathbb{C},\ |\zeta| \leq 1\}.$$

証明 定理 6.2.7 より A のユニタリー・ダイレーション U をとる．$A^n = P_{\mathcal{H}}U^n|\mathcal{H}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ より $p(A) = P_{\mathcal{H}}p(U)|\mathcal{H}$ が成立する．よって

$$\begin{aligned} ||p(A)|| \leq ||p(U)|| &= \max\{|p(\zeta)| : \zeta \in \sigma(U)\} \\ &\leq \max\{|p(\zeta)| : |\zeta| \leq 1\}. \end{aligned}$$

上の等号は命題 3.1.10, 3.1.13 による． ■

実際，多項式より一般に $\{\zeta : |\zeta| \leq 1\}$ を含む開集合で解析的な関数 f に対しても，$f(A) = P_{\mathcal{H}}f(U)|\mathcal{H}$ となり，フォン・ノイマンの不等式が上と同じく成立する (定理 3.2.6, 演習問題 3.8 参照)．

2 つの可換な縮小作用素に対する可換ユニタリー・ダイレーションの存在は安藤によって証明された．

定理 6.2.10 (安藤の可換ダイレーション) 縮小作用素 $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が $A_1A_2 = A_2A_1$ であるとき，ヒルベルト空間 $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ とユニタリー作用素 $U_1, U_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ が存在して，$U_1U_2 = U_2U_1$ かつ

$$A_1^nA_2^m = P_{\mathcal{H}}U_1^nU_2^m|\mathcal{H}, \qquad n, m \geq 0.$$

証明　定理 6.2.7 の証明のように，ヒルベルト空間 $\mathbf{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$ $(\mathcal{H}_n = \mathcal{H})$ を考え，$x \in \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ と $(x, 0, 0, \ldots) \in \mathbf{H}$ を同一視して $\mathcal{H} \subset \mathbf{H}$ とみなす．$i = 1, 2$ に対して

$$\mathbf{V}_i(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (A_i x_0, D_{A_i} x_0, 0, x_1, x_2, \ldots)$$

と定めると，$\mathbf{V}_i$ は $\mathbf{H}$ 上の等距離作用素である．ついでに，$\mathbf{V}_i$ の行列表示を書いておくと

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 & & \\ D_{A_i} & 0 & & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & & \\ 0 & I & & \\ & & I & \\ \mathbf{0} & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{V}_1^n \mathbf{V}_2^m (x, 0, 0, \ldots)$ の最初の成分が $A_1^n A_2^m x$ であるから

$$P_{\mathcal{H}} \mathbf{V}_1^n \mathbf{V}_2^m | \mathcal{H} = A_1^n A_2^m, \qquad n, m \geq 0.$$

さらに

$$\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 (x_0, x_1, x_2, \ldots) = (A_1 A_2 x_0, D_{A_1} A_2 x_0, 0, D_{A_2} x_0, x_1, x_2, \ldots), \quad (6.11)$$

$$\mathbf{V}_2 \mathbf{V}_1 (x_0, x_1, x_2, \ldots) = (A_1 A_2 x_0, D_{A_2} A_1 x_0, 0, D_{A_1} x_0, x_1, x_2, \ldots). \quad (6.12)$$

任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned} \|D_{A_1} A_2 x\|^2 + \|D_{A_2} x\|^2 &= \|A_2 x\|^2 - \|A_1 A_2 x\|^2 + \|x\|^2 - \|A_2 x\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \|A_2 A_1 x\|^2 \\ &= \|D_{A_2} A_1 x\|^2 + \|D_{A_1} x\|^2 \end{aligned}$$

であるから，$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 上のユニタリー作用素 R が存在して

$$R(D_{A_1} A_2 x, 0, D_{A_2} x, 0) = (D_{A_2} A_1 x, 0, D_{A_1} x, 0), \qquad x \in \mathcal{H}. \quad (6.13)$$

これには，$\dim \mathcal{H}$ が有限，無限いずれでも

$$\begin{aligned} &\dim\{(D_{A_1} A_2 x, 0, D_{A_2} x, 0) : x \in \mathcal{H}\}^{\perp} \\ &\quad = \dim\{(D_{A_2} A_1 x, 0, D_{A_1} x, 0) : x \in \mathcal{H}\}^{\perp} \end{aligned}$$

に注意すればよい．そこで，$\mathbf{H}$ 上のユニタリー作用素 $\mathbf{R}$ を

$$\mathbf{R}(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_0, R(x_1, x_2, x_3, x_4), R(x_5, x_6, x_7, x_8), \ldots) \tag{6.14}$$

と定める．$V_1 = \mathbf{R}\mathbf{V}_1$, $V_2 = \mathbf{V}_2\mathbf{R}^*$ とおくと，V_1, V_2 は $\mathbf{H}$ 上の等距離作用素であり $V_2V_1 = \mathbf{V}_2\mathbf{V}_1$. さらに (6.11)–(6.14) より

$$\begin{aligned}
&V_1V_2(x_0, x_1, x_2, \ldots)\\
&\quad = \mathbf{R}\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2\mathbf{R}^*(x_0, x_1, x_2, \ldots)\\
&\quad = \mathbf{R}\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2(x_0, R^*(x_1, x_2, x_3, x_4), R^*(x_5, x_6, x_7, x_8), \ldots)\\
&\quad = \mathbf{R}(A_1A_2x_0, D_{A_1}A_2x_0, 0, D_{A_2}x_0, 0, R^*(x_1, x_2, x_3, x_4), \ldots)\\
&\quad = (A_1A_2x_0, D_{A_2}A_1x_0, 0, D_{A_1}x_0, 0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)\\
&\quad = \mathbf{V}_2\mathbf{V}_1(x_0, x_1, x_2, \ldots) = V_2V_1(x_0, x_1, x_2, \ldots).
\end{aligned}$$

よって $V_1V_2 = V_2V_1$. また

$$P_{\mathcal{H}}V_1^nV_2^m|\mathcal{H} = P_{\mathcal{H}}\mathbf{V}_1^n\mathbf{V}_2^m|\mathcal{H} = A_1^nA_2^m, \qquad n, m \geq 0$$

は明らかである．

以下，(V_1, V_2) を可換なユニタリー作用素の組 (U_1, U_2) に拡大する．V_1 は $\mathbf{H}$ 上で等距離だから，$W_1 = \begin{bmatrix} V_1^* & 0 \\ D_{V_1^*} & V_1 \end{bmatrix}$ は $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ 上のユニタリー作用素である．ここで，$\mathcal{H} = 0\oplus\mathcal{H} \subset 0\oplus\mathbf{H} \subset \mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ とみなす．$W_1(0\oplus\mathbf{H}) \subset 0\oplus\mathbf{H}$ より $W_1^*(0\oplus\mathbf{H}) \supset 0\oplus\mathbf{H}$ である．いま，$\mathcal{L} = \bigvee_{n=0}^{\infty} W_1^{*n}(0\oplus\mathbf{H})$ $(\supset \mathcal{H})$ とおくと，$W_1\mathcal{L} = \mathcal{L}$ より $W_1|\mathcal{L}$ はユニタリーとなる．任意の $x, y \in \mathbf{H}$ に対して，$n \geq m$ のとき

$$\begin{aligned}
\langle W_1^{*n}(0,x), W_1^{*m}(0,y)\rangle &= \langle (0,x), W_1^{n-m}(0,y)\rangle = \langle x, V_1^{n-m}y\rangle\\
&= \langle V_2x, V_2V_1^{n-m}y\rangle = \langle V_2x, V_1^{n-m}V_2y\rangle\\
&= \langle W_1^{*n}(0, V_2x), W_1^{*m}(0, V_2y)\rangle.
\end{aligned}$$

$n < m$ のときも同様．ゆえに $\mathcal{L}$ 上の等距離作用素 W_2 を

$$W_2\left(\sum_{n=0}^{N} W_1^{*n}(0, x_n)\right) = \sum_{n=0}^{N} W_1^{*n}(0, V_2x_n), \qquad x_n \in \mathbf{H},\ N \in \mathbb{N}$$

と定義できる．任意の $x \in \mathbf{H}$ に対して，$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} W_2 W_1 W_1^{*n}(0,x) &= W_2 W_1^{*n-1}(0,x) = W_1^{*n-1}(0, V_2 x) \\ &= W_1 W_1^{*n}(0, V_2 x) = W_1 W_2 W_1^{*n}(0,x). \end{aligned}$$

また

$$W_2 W_1(0,x) = W_2(0, V_1 x) = (0, V_2 V_1 x) = (0, V_1 V_2 x) = W_1 W_2(0,x).$$

よって $W_1|\mathcal{L}$ を改めて W_1 と書くと，$W_1 W_2 = W_2 W_1$ であり

$$P_{\mathcal{H}} W_1^n W_2^m | \mathcal{H} = A_1^n A_2^m, \qquad n, m \geq 0$$

は容易に確かめられる．W_1 がユニタリーだから $W_2 W_1^* = W_1^* W_2$．したがって $W_1 W_2^* = W_2^* W_1$, $W_1 D_{W_2^*} = D_{W_2^*} W_1$．最後に $\mathcal{K} = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_n$ ($\mathcal{L}_n = \mathcal{L}$) として，$\mathcal{H} \subset \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{K}$ とみなす．$\mathcal{K}$ 上で $U_1 = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} W_1$ (i.e. $U_1(x_n) = (W_1 x_n)$) とし，$(y_n) = U_2(x_n)$ を

$$y_n = \begin{cases} x_{n-1}, & n < 0 \\ D_{w_2^*} x_{-1} + W_2 x_0, & n = 0 \\ -W_2^* x_{-1}, & n = 1 \\ x_{n-1}, & n > 1 \end{cases}$$

と定めると，U_1, U_2 はユニタリーで $U_1 U_2 = U_2 U_1$ である．

$$P_{\mathcal{H}} U_1^n U_2^m | \mathcal{H} = A_1^n A_2^m, \qquad n, m \geq 0$$

も簡単に示せて結論がいえる．■

注意 6.2.11　(1) 前定理で $\mathcal{K} = \bigvee_{n,m=-\infty}^{\infty} U_1^n U_2^m \mathcal{H}$ と極小にとり直せるが，(U_1, U_2) がこの極小条件のもとでユニタリー同値の意味で一意であることはいえない．

(2) 3 個の可換な縮小作用素の組 (A_1, A_2, A_3), $A_i A_j = A_j A_i$ に対しては，可換ユニタリー・ダイレーション (U_1, U_2, U_3) が一般に存在しないことが知られている．

この節の残りで，もう少し代数的なアプローチを用いてダイレーション理論を展開しよう．以下，Ω はコンパクト・ハウスドルフ空間とし，$C(\Omega)$ は

Ω 上の連続関数の全体とする．以下に述べるシュタインスプリングの定理は，C^*-環から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への完全正値写像について成立する．しかし，C^*-環や完全正値写像に関する議論に立ち入るのを避けるため，連続関数環 $C(\Omega)$ に限定して述べることにする．まず，補題を少し用意する．

補題 6.2.12 線型写像 $\Phi : C(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が正値 (i.e. $f \in C(\Omega)$, $f \geq 0 \Longrightarrow \Phi(f) \geq 0$) ならば，$\Phi$ は有界で $||\Phi|| \leq 2||\Phi(1)||$.

証明 $f \in C(\Omega)$ が実数値のとき，$-||f||1 \leq f \leq ||f||1$ より $-||f||\Phi(1) \leq \Phi(f) \leq ||f||\Phi(1)$. よって $||\Phi(f)|| \leq ||\Phi(1)||\,||f||$. 一般の $f \in C(\Omega)$ のとき，$g = (f + \overline{f})/2$, $h = (f - \overline{f})/2i$ とおくと，$f = g + ih$ で $||g||, ||h|| \leq ||f||$ だから

$$||\Phi(f)|| = ||\Phi(g) + i\Phi(h)|| \leq ||\Phi(g)|| + ||\Phi(h)|| \leq 2||\Phi(1)||\,||f||.$$

よって $||\Phi|| \leq 2||\Phi(1)||$. ■

次の補題は，正値の線型写像 $\Phi : C(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が自動的に完全正値であることを意味する．

補題 6.2.13 線型写像 $\Phi : C(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が正値ならば，任意の $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_n \in C(\Omega)$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ に対して

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle \Phi(f_i \overline{f}_j) x_i, x_j \rangle \geq 0.$$

証明 $\omega \mapsto [f_i(\omega)\overline{f_j(\omega)}]_{i,j=1}^n$ は $n \times n$ 正定値行列を値とする Ω 上の連続関数である．Ω のコンパクト性から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，Ω の有限開被覆 $\{O_1, \ldots, O_N\}$ と正定値行列 $A_k = [a_{ij}^{(k)}]_{i,j=1}^n$ $(k = 1, \ldots, N)$ がとれて

$$||[f_i(\omega)\overline{f_j(\omega)}] - A_k|| < \varepsilon, \qquad \omega \in O_k,\ 1 \leq k \leq N.$$

ただし，上のノルムは $n \times n$ 行列の作用素ノルムとする．開被覆 $\{O_1, \ldots, O_N\}$ に従属する単位の分解 $\{h_1, \ldots, h_N\}$ がとれる．すなわち $h_k \in C(\Omega)$, $0 \leq h_k \leq 1$, $h_k(\omega) = 0$ $(\omega \notin O_k)$, かつ $\sum_{k=1}^N h_k = 1$. よって

$$\left|\left|[f_i(\omega)\overline{f_j(\omega)}] - \sum_{k=1}^{N} h_k(\omega) A_k\right|\right| < \varepsilon, \qquad \omega \in \Omega.$$

これより，$C(\Omega)$ のノルムについて

$$\left\|f_i\overline{f}_j-\sum_{k=1}^N a_{ij}^{(k)}h_k\right\|<\varepsilon,\qquad 1\le i,j\le n.$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\Bigl|\sum_{i,j=1}^n\langle\Phi(f_i\overline{f}_j)x_i,x_j\rangle-\sum_{k=1}^N\sum_{i,j=1}^n\langle a_{ij}^{(k)}\Phi(h_k)x_i,x_j\rangle\Bigr|\\
&\quad\le\sum_{i,j=1}^n\left|\left\langle\Phi\left(f_i\overline{f}_j-\sum_{k=1}^N a_{ij}^{(k)}h_k\right)x_i,x_j\right\rangle\right|\\
&\quad\le\sum_{i,j=1}^n\left\|\Phi\left(f_i\overline{f}_j-\sum_{k=1}^N a_{ij}^{(k)}h_k\right)\right\|\,\|x_i\|\,\|x_j\|\\
&\quad\le\varepsilon\|\Phi\|\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|\right)^2.
\end{aligned}$$

上で Φ の有界性は前補題による．ε は任意だから，$\sum_{i,j=1}^n\langle a_{ij}^{(k)}\Phi(h_k)x_i,x_j\rangle\ge 0$ であれば結論がいえる．したがって，$A=[a_{ij}]\ge 0$ と $h\in C(\Omega)$, $h\ge 0$ に対して $\sum_{i,j=1}^n\langle a_{ij}\Phi(h)x_i,x_j\rangle\ge 0$ を示せば十分である．$A=BB^*$ である $B=[b_{ij}]$ がとれて $a_{ij}=\sum_{l=1}^n b_{il}\overline{b}_{jl}$ $(i,j=1,\dots,n)$. よって $\Phi(h)\ge 0$ より

$$\sum_{i,j=1}^n\langle a_{ij}\Phi(h)x_i,x_j\rangle=\sum_{l=1}^n\left\langle\Phi(h)\left(\sum_{i=1}^n b_{il}x_i\right),\sum_{i=1}^n b_{il}x_i\right\rangle\ge 0.\quad\blacksquare$$

定理 6.2.14 (シュタインスプリングの表現定理) 任意の正値の線型写像 $\Phi:C(\Omega)\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，ヒルベルト空間 $\mathcal{K}\supset\mathcal{H}$, $*$-表現 (i.e. $*$-準同型写像) $\pi:C(\Omega)\to\mathcal{B}(\mathcal{K})$, および $V\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ が存在して，$\mathcal{K}=\bigvee\{\pi(f)V\mathcal{H}:f\in C(\Omega)\}$ (極小条件) かつ

$$\Phi(f)=V^*\pi(f)V,\qquad f\in C(\Omega).\tag{6.15}$$

このような 3 つ組 $(\mathcal{K},\pi,V)$ はユニタリー同値の意味で一意である．つまり $(\mathcal{K}_1,\pi_1,V_1)$ も上と同じ条件を満たすとすると，$Ux=x$ $(x\in\mathcal{H})$ となるユニタリー作用素 $U:\mathcal{K}\to\mathcal{K}_1$ が存在して $\pi_1(f)=U\pi(f)U^{-1}$ $(f\in C(\Omega))$, $V_1=UV$.

証明 X を $C(\Omega)$ と $\mathcal{H}$ の代数的テンソル積とする．つまり X は，$\{f \otimes x : f \in C(\Omega),\ x \in \mathcal{H}\}$ の 1 次結合の全体に，$\alpha \in \mathbb{C}$, $f, g \in C(\Omega)$, $x, y \in \mathcal{H}$ に対して $\alpha(f \otimes x) = (\alpha f) \otimes x = f \otimes (\alpha x)$, $(f+g) \otimes x = f \otimes x + g \otimes x$, $f \otimes (x+y) = f \otimes x + f \otimes y$ の同一視を入れた線型空間のことである．$u = \sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i, v = \sum_{j=1}^m g_j \otimes y_j \in X$ に対して

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle \Phi(f_i \overline{g}_j) x_i, y_j\rangle$$

と定めると，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は X 上の双線型汎関数になり，補題 6.2.13 より正定値である．$\mathcal{N} = \{u \in X : \langle u, u\rangle = 0\}$ とおく．シュワルツの不等式 $|\langle u, v\rangle|^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle$ (命題 1.1.4) より

$$\mathcal{N} = \{u \in X : \langle u, v\rangle = 0\ (v \in X)\}$$

と書けるから，$\mathcal{N}$ は X の線型部分空間となる．商空間 $X/\mathcal{N}$ をとり，$[u] = u + \mathcal{N}, [v] = v + \mathcal{N} \in X/\mathcal{N}$ に対して $\langle [u], [v]\rangle = \langle u, v\rangle$ と定めると，$X/\mathcal{N}$ は内積空間になる．$X/\mathcal{N}$ の完備化ヒルベルト空間 (命題 1.2.10) を $\mathcal{K}$ とする．

任意の $f \in C(\Omega)$ と $u = \sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i \in X$ に対して，$u' = \sum_{i=1}^n (f f_i) \otimes x_i$ とおくと

$$\begin{aligned}
&||f||^2 \langle u, u\rangle - \langle u', u'\rangle \\
&= ||f||^2 \sum_{i,j=1}^n \langle \Phi(f_i \overline{f}_j) x_i, x_j\rangle - \sum_{i,j=1}^n \langle \Phi(f f_i \overline{f f_j}) x_i, x_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle \Phi((||f||^2 - |f|^2) f_i \overline{f}_j) x_i, x_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle \Phi((||f||^2 - |f|^2)^{1/2} f_i \overline{(||f||^2 - |f|^2)^{1/2} f_j}) x_i, x_j\rangle \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

上の不等号は補題 6.2.13 による．よって $\langle u', u'\rangle \leq ||f||^2 \langle u, u\rangle$ となり，$u \in \mathcal{N} \Longrightarrow u' \in \mathcal{N}$ が成立する．ゆえに $X/\mathcal{N}$ 上の線型作用素 $\pi(f)$ を $\pi(f)[u] = [u']$ と定義できて $||\pi(f)|| \leq ||f||$. これより $\pi(f)$ は $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ の要素に一意的に拡張できる．これを同じ $\pi(f)$ で表すと，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ と $f, g \in C(\Omega)$ に対して

$$\pi(\alpha f + \beta g)[u] \quad = \quad \left[\sum_{i=1}^n ((\alpha f + \beta g) f_i) \otimes x_i\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha\left[\sum_{i=1}^{n}(ff_i)\otimes x_i\right] + \beta\left[\sum_{i=1}^{n}(gf_i)\otimes x_i\right] \\
&= (\alpha\pi(f)+\beta\pi(g))[u],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \pi(f)[u],[v]\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle \Phi(ff_i\overline{g}_j)x_i, y_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle \Phi(f_i\overline{\overline{f}g_j})x_i, y_j\rangle = \langle [u], \pi(\overline{f})[v]\rangle.
\end{aligned}
$$

よって $\pi(\alpha f+\beta g)=\alpha\pi(f)+\beta\pi(g)$, $\pi(\overline{f})=\pi(f)^*$ となり，$\pi: C(\Omega)\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ は $*$-表現である．

次に，$x\in\mathcal{H}$ に対して $Vx=[1\otimes x]$ と定めると

$$
\|Vx\|^2 = \langle 1\otimes x, 1\otimes x\rangle = \langle \Phi(1)x,x\rangle \le \|\Phi(1)\|\,\|x\|^2
$$

だから，$V\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ に拡張できる．このとき，任意の $f\in C(\Omega)$, $x\in\mathcal{H}$ に対して $\pi(f)Vx=\pi(f)[1\otimes s]=[f\otimes x]$. ゆえに $\mathcal{K}=\bigvee\{\pi(f)V\mathcal{H}: f\in C(\Omega)\}$ が得られる．さらに，任意の $f\in C(\Omega)$ と $x,y\in\mathcal{H}$ に対して

$$
\langle V^*\pi(f)Vx,y\rangle = \langle \pi(f)Vx, Vy\rangle = \langle f\otimes x, 1\otimes y\rangle = \langle \Phi(f)x,y\rangle.
$$

したがって (6.15) が成立する．一意性の証明は演習問題とする．■

注意 6.2.15　(1) 上の証明から，$f\in C(\Omega)$ に対して

$$
\|\Phi(f)\| = \|V^*\pi(f)V\| \le \|V\|^2\|\pi(f)\| \le \|\Phi(f)\|\,\|f\|.
$$

また $\Phi(1)=V^*V$. よって $\|\Phi\|=\|\Phi(1)\|=\|V\|^2$ が成立する．

(2) 定理 6.2.14 で $\Phi(1)=I$ のとき，$\|Vx\|^2=\langle\Phi(1)x,x\rangle=\|x\|^2$ $(x\in\mathcal{H})$ より $V:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ は等距離作用素となる．$x\in\mathcal{H}$ と $Vx\in\mathcal{K}$ を同一視して $\mathcal{H}\subset\mathcal{K}$ とみなすと，$V^*=P_{\mathcal{H}}$ となる．ゆえに (6.15) は

$$
\Phi(f) = P_{\mathcal{H}}\pi(f)|\mathcal{H}, \qquad f\in C(\Omega)
$$

と書けるから，π は Φ のダイレーションと見ることができる．

定義 3.2.8 のスペクトル測度を一般化して，次の定義を与える．

定義 6.2.16 $\mathcal{B}_\Omega$ をコンパクト・ハウスドルフ空間 Ω のボレル σ-集合体とする．$\mathcal{B}(\mathcal{H})_+ = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : A \geq 0\}$ とおく．

(1) 写像 $Q : \mathcal{B}_\Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ が

(i) $Q(\Omega) = I$,

(ii) 互いに素な $\{S_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}_\Omega$ に対して

$$Q\left(\bigcup_{n=1}^\infty S_n\right) = \sum_{n=1}^\infty Q(S_n) \quad (\text{強収束})$$

を満たすとき，Q を Ω 上の**正作用素測度**という．

(2) Ω 上の正作用素測度 Q が**正則**とは，任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して測度 $\langle Q(\cdot)x, x\rangle$ が正則であるときをいう．

補題 6.2.17 正則な正作用素測度 $Q : \mathcal{B}_\Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ と $\Phi(1) = I$ である正値の線型写像 $\Phi : C(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の間に，次の関係

$$\int_\Omega f(\omega) d\langle Q(\omega)x, y\rangle = \langle \Phi(f)x, y\rangle, \qquad f \in C(\Omega),\ x, y \in \mathcal{H} \tag{6.16}$$

により 1 対 1 の対応が定まる．このとき，Q がスペクトル測度であることは，Φ が $*$-表現であることと同値である．

証明 $Q : \mathcal{B}_\Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ を正則な正作用素測度とする．各 $x, y \in \mathcal{H}$ に対して $\mu_{x,y}(S) = \langle Q(S)x, y\rangle$ $(S \in \mathcal{B}_\Omega)$ により $\mu_{x,y} \in M(\Omega)$ が定まる．任意の $f \in C(\Omega)$ に対して

$$(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto \int f d\mu_{x,y} = \int_\Omega f(\omega) d\langle Q(\omega)x, y\rangle$$

は $\mathcal{H}$ 上の双線型汎関数となる．ここで，$\|\mu_{x,x}\| = \mu_{x,x}(\Omega) = \|x\|^2$ であり

$$\mu_{x,y} = \frac{1}{4}(\mu_{x+y,x+y} - \mu_{x-y,x-y} + i\mu_{x+iy,x+iy} - i\mu_{x-iy,x-iy})$$

であるから，$\|\mu_{x,y}\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$ がわかる．よって $\|x\|, \|y\| \leq 1$ のとき $|\int f d\mu_{x,y}| \leq \|f\|\,\|\mu_{x,y}\| \leq 2\|f\|$ となるから，$(x, y) \mapsto \int f d\mu_{x,y}$ は有界である．ゆえに補題 2.1.4 より

$$\int f d\mu_{x,y} = \langle \Phi(f)x, y\rangle, \qquad x, y \in \mathcal{H}$$

を満たす $\Phi(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が一意的に存在する．これで (6.16) を満たす写像 $\Phi : C(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が定まった．Φ の線型性と $\Phi(1) = I$ は明らか．また，$f \in C(\Omega)$, $f \geq 0$ ならば $\langle \Phi(f)x, x\rangle = \int f d\mu_{x,x} \geq 0$ だから，Φ は正値である．

逆に，$\Phi : C(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $\Phi(1) = I$ である正値の線型写像とする．注意 6.2.15 (1) より $\|\Phi\| = \|\Phi(1)\| = 1$．各 $x, y \in \mathcal{H}$ に対して $\varphi_{x,y}(f) = \langle \Phi(f)x, y\rangle$ $(f \in C(\Omega))$ と定めると，$\varphi_{x,y}$ は $C(\Omega)$ 上の線型汎関数であり $|\varphi_{x,y}(f)| \leq \|f\|\,\|x\|\,\|y\|$. 以下，(6.16) を満たす正作用素測度 Q の存在の証明は定理 3.2.16 と同じである．最後の主張も命題 3.2.13 と定理 3.2.16 よりすぐにわかる．■

一般に，f が Ω 上の有界ボレル関数のとき

$$(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto \int_\Omega f(\omega) d\langle Q(\omega)x, y\rangle$$

が $\mathcal{H}$ 上の有界な双線型汎関数となるから，$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が一意的に存在して

$$\langle Ax, y\rangle = \int_\Omega f(\omega) d\langle Q(\omega)x, y\rangle, \qquad x, y \in \mathcal{H}.$$

この A を $A = \int f dQ$ と表す．したがって，上の Φ は $\Phi(f) = \int f dQ$ と書ける．

定理 6.2.18 (ナイマルクのダイレーション)　$Q : \mathcal{B}_\Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ を正則な正作用素測度とするとき，ヒルベルト空間 $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ とスペクトル測度 $E : \mathcal{B}_\Omega \to \mathcal{P}(\mathcal{K})$ が存在して

$$Q(S) = P_\mathcal{H} E(S)|\mathcal{H}, \qquad S \in \mathcal{B}_\Omega.$$

証明　補題 6.2.17 より，(6.16) を満たし $\Phi(1) = I$ である正値の線型写像 $\Phi : C(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在する．定理 6.2.14 と注意 6.2.15 (2) より，ヒルベルト空間 $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ と $*$-表現 $\pi : C(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ が存在して

$$\Phi(f) = P_\mathcal{H} \pi(f)|\mathcal{H}, \qquad f \in C(\Omega). \tag{6.17}$$

再び補題 6.2.17(または定理 3.2.16) より，スペクトル測度 $E : \mathcal{B}_\Omega \to \mathcal{P}(\mathcal{K})$ が存在して

$$\pi(f) = \int f dE, \qquad f \in C(\Omega). \tag{6.18}$$

任意の $f \in C(\Omega)$ と $x, y \in \mathcal{H}$ に対して，(6.16)–(6.18) より

$$\int f(\omega) d\langle Q(\omega)x, y\rangle = \langle \Phi(f)x, y\rangle = \langle \pi(f)x, y\rangle = \int f(\omega) d\langle E(\omega)x, y\rangle.$$

したがって，任意の $S \in \mathcal{B}_\Omega$ に対して $\langle Q(S)x, y\rangle = \langle E(S)x, y\rangle$ $(x, y \in \mathcal{H})$. これは $Q(S) = P_{\mathcal{H}}E(S)|\mathcal{H}$ を意味する． ■

この節で説明した結果以外にも，Sz. ナジー-フォヤシによる可換ダイレーション，ρ-ダイレーション，ナイマルクによる位相群上の正定値関数の表現定理など，いろいろなダイレーション型の定理が知られている．

6.3 サブ正規作用素

正規作用素については，スペクトル分解定理 (付録の定理 A.5.10) のおかげで，その構造がよく理解できて詳しい解析ができる．正規作用素に関する結果を拡張する試みの中で，正規作用素に近い有界作用素のクラスがいくつも導入された．中でも，ハルモスが導入したサブ正規作用素とハイポ正規作用素については多くの研究がなされている．他に，正規作用素に近いクラスとして，クェーサイ正規作用素が知られている．この節では，これらの作用素について基本的な事柄を解説しよう．

定義 6.3.1 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする．

(1) A が**サブ正規**であるとは，$\mathcal{H}$ を含むヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ と正規作用素 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ が存在して $B\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ かつ $A = B|\mathcal{H}$ を満たすときをいう．このような B を A の**正規拡大**という．

(2) A が**クェーサイ正規**であるとは，A と A^*A が可換，i.e. $AA^*A = A^*A^2$ のときをいう．これは $A|A| = |A|A$ と同値である．

(3) A が**ハイポ正規**であるとは，$A^*A \geq AA^*$ のときをいう．これは $||Ax|| \geq ||A^*x||$ $(x \in \mathcal{H})$ と同値である．

命題 6.3.2 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の極分解を $A = W|A|$ とすると，A がクェーサイ正規 $\Longleftrightarrow$ $W|A| = |A|W$ (演習問題 2.13 参照)．

証明 $W|A| = |A|W$ ならば，$A|A|^2 = W|A|^3 = |A|^2W|A| = |A|^2A$ だから A はクェーサイ正規である．逆に，A がクェーサイ正規ならば，A と $|A|$ が

可換であり $(W|A|-|A|W)|A| = A|A|-|A|A = 0$. よって任意の $x \in \operatorname{ran}|A|$ に対して $(W|A|-|A|W)x = 0$. また, $\ker W = \ker A = \ker|A|$ より, $x \in (\operatorname{ran}|A|)^{\perp}$ のとき $(W|A|-|A|W)x = 0$. したがって $W|A|-|A|W = 0$. ■

命題 6.3.3 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に関する次の条件について, (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) が成立：

(i) A が正規；

(ii) A がクェーサイ正規；

(iii) A がサブ正規；

(iv) A がハイポ正規.

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) は明らか.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). $A = W|A|$ を A の極分解とする. $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ を 2×2 作用素行列で表示して

$$B = \begin{bmatrix} A & (I-WW^*)|A| \\ 0 & A^* \end{bmatrix}$$

と定める. $\mathcal{H} = \mathcal{H} \oplus 0 \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ とみなすと, 明らかに $B\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ で $A = B|\mathcal{H}$ である. 命題 6.3.2 より $A = W|A| = |A|W$, $A^* = |A|W^* = W^*|A|$ だから

$$\begin{aligned} B^*B &= \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ |A|(I-WW^*) & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & (I-WW^*)|A| \\ 0 & A^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} |A|^2 & A^*(I-WW^*)|A| \\ |A|(I-WW^*)A & |A|(I-WW^*)|A| + AA^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} |A|^2 & 0 \\ 0 & |A|^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BB^* &= \begin{bmatrix} A & |A|(I-WW^*) \\ 0 & A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ (I-WW^*)|A| & A \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} |A|^2 & 0 \\ 0 & |A|^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

よって B は正規であり, A はサブ正規となる.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). A がサブ正規とすると，ヒルベルト空間 $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ と正規作用素 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ がとれて $B\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$, $A = B|\mathcal{H}$. 直交分解 $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus (\mathcal{K} \ominus \mathcal{H})$ に対応して $B = \begin{bmatrix} A & R \\ 0 & S \end{bmatrix}$ と書ける．ここで $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K} \ominus \mathcal{H})$, $R \in \mathcal{B}(\mathcal{K} \ominus \mathcal{H}, \mathcal{H})$. このとき

$$\begin{aligned} 0 &= B^*B - BB^* \\ &= \begin{bmatrix} A^*A & A^*R \\ R^*A & R^*R + S^*S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} AA^* + RR^* & RS^* \\ SR^* & SS^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

よって (1,1) 成分をとると $A^*A = AA^* + RR^* \geq AA^*$. ■

次の例は，前命題の (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) の逆がすべて成立しないことを示す．

例 6.3.4 V を ℓ^2 上の片側シフト作用素とする．

(1) V はクェーサイ正規であるが，正規でない．

(2) $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$ のとき，$V + \alpha I$ はサブ正規であるが，クェーサイ正規でない．

(3) $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$ のとき，$V^* + \alpha V$ はハイポ正規であるが，サブ正規でない．

証明 (1) は明らか．

(2) $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$ とする．

$$\begin{aligned} &(V + \alpha I)(V + \alpha I)^*(V + \alpha I) \\ &\quad = \overline{\alpha}V^2 + \alpha VV^* + (2|\alpha|^2 + 1)V + \alpha^2 V^* + (\alpha|\alpha|^2 + \alpha)I, \end{aligned}$$

$$(V + \alpha I)^*(V + \alpha I)^2 = \overline{\alpha}V^2 + (2|\alpha|^2 + 1)V + \alpha^2 V^* + (\alpha|\alpha|^2 + 2\alpha)I.$$

よって $V + \alpha I$ はクェーサイ正規でない．しかし，V は両側シフトのユニタリー作用素に拡大できるから，サブ正規である．したがって $V + \alpha I$ もサブ正規である．

(3) $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$ とする．

$$\begin{aligned} &(V^* + \alpha V)^*(V^* + \alpha V) - (V^* + \alpha V)(V^* + \alpha V)^* \\ &\quad = (\alpha^2 - 1)(I - VV^*) \geq 0 \end{aligned}$$

であるから，$V^*+\alpha I$ はハイポ正規である．他方，$x=(1,0,s,0,0,\ldots)$ $(s\in\mathbb{R})$ とおくと

$$(V^*+\alpha V)^2x=(s+\alpha,0,2\alpha s+\alpha^2,0,\alpha^2 s,0,\ldots),$$

$$(V^*+\alpha V)^{*2}x=(\alpha^2 s+\alpha,0,2\alpha s+1,0,s,0,\ldots)$$

だから

$$||(V^*+\alpha V)^2x||^2-||(V^*+\alpha V)^{*2}x||^2=(\alpha^2-1)(2\alpha s+\alpha^2+1).$$

$s<-(\alpha^2+1)/2\alpha$ とすると $||(V^*+\alpha V)^2x||<||(V^*+\alpha V)^{*2}x||$ となり，$(V^*+\alpha V)^2$ はハイポ正規でない．$V^*+\alpha V$ がサブ正規とすると，$(V^*+\alpha V)^2$ もサブ正規で，それゆえハイポ正規でなければならないから，$V^*+\alpha V$ はサブ正規でない． ■

定義 6.3.5 (1) $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ について，A を約する閉部分空間 $\mathcal{M}$ で $A|\mathcal{M}$ が正規であるものが $\{0\}$ 以外に存在しないとき，A は**完全非正規**という．この A は**純粋**と呼ばれることも多い．

(2) $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の正規拡大 $B\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ が**極小**であるとは，$\mathcal{H}$ を含む $\mathcal{K}$ の閉部分空間 $\mathcal{M}$ で B を約するものが $\mathcal{K}$ 以外に存在しないときをいう．

命題 6.3.6 任意の $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，A を約する $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{H}_0$ が存在して，$A|\mathcal{H}_0$ が正規かつ $A|\mathcal{H}_0^\perp$ が完全非正規となる．この閉部分空間 $\mathcal{H}_0$ は一意である．

証明 $\mathbb{M}$ を A を約する $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{M}$ で $A|\mathcal{M}$ が正規であるものの全体とする．$\mathcal{H}_0=\bigvee\{\mathcal{M}:\mathcal{M}\in\mathbb{M}\}$ とおくと，明らかに $A\mathcal{H}_0\subset\mathcal{H}_0$ かつ $A^*\mathcal{H}_o\subset\mathcal{H}_0$. つまり $\mathcal{H}_0$ は A を約する．任意の $\mathcal{M}\in\mathbb{M}$ に対して，$(A|\mathcal{M})^*=A^*|\mathcal{M}$ だから $\mathcal{M}\subset\ker(A^*A-AA^*)$. ゆえに $\mathcal{H}_0\subset\ker(A^*A-AA^*)$ となり $\mathcal{H}_0\in\mathbb{M}$. $A|\mathcal{H}_0^\perp$ が完全非正規であることは $\mathcal{H}_0$ の定義より明らか．一意性を示すために，$\mathcal{H}_1\in\mathbb{M}$ で $A|\mathcal{H}_1^\perp$ が完全非正規とする．このとき，$\mathcal{H}_1\subset\mathcal{H}_0$ で $\mathcal{H}_0\ominus\mathcal{H}_1\in\mathbb{M}$ だから，$\mathcal{H}_0\ominus\mathcal{H}_1=\{0\}$ となり $\mathcal{H}_0=\mathcal{H}_1$. ■

$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して命題 6.3.6 の $\mathcal{H}_0$ をとると，A が完全非正規 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{H}_0=\{0\}$. また，A がサブ，クェーサイ，ハイポ正規であることは，それぞれ $A|\mathcal{H}_0^\perp$ がサブ，クェーサイ，ハイポ正規であることと同値である．

命題 6.3.7 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ がサブ正規ならば，A は極小正規拡大をもつ．さらに，A の極小正規拡大は，$\Gamma x = x$ $(x \in \mathcal{H})$ となるユニタリー作用素 Γ によるユニタリー同値を除いて一意である．

証明 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ を A の正規拡大とする．$\mathcal{K}_0 = \bigvee_{n=0}^{\infty} B^{*n}\mathcal{H}$ と定める．このとき，$\mathcal{K}_0 \supset \mathcal{H}$ で $B^*\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_0$. また，任意の $n \geq 0$ に対して

$$B(B^{*n}\mathcal{H}) = B^{*n}B\mathcal{H} = B^{*n}A\mathcal{H} \subset B^{*n}\mathcal{H}.$$

よって $B\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_0$ となり，$\mathcal{K}_0$ は B を約する．したがって $B_0 = B|\mathcal{K}_0$ は A の正規拡大である．閉部分空間 $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}_0$ が $\mathcal{M} \supset \mathcal{H}$ で B_0 を約するならば，すべての $n \geq 0$ に対して

$$\mathcal{M} \supset B_0^{*n}\mathcal{M} \supset B_0^{*n}\mathcal{H} = B^{*n}\mathcal{H}.$$

よって $\mathcal{M} \supset \mathcal{K}_0$ となり $\mathcal{M} = \mathcal{K}_0$. ゆえに B_0 は A の極小正規拡大となる．

一意性を示すために，$B_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1)$ も A の極小正規拡大とする．このとき，上の議論より $\mathcal{K}_1 = \bigvee_{n=0}^{\infty} B_1^{*n}\mathcal{H}$ がわかる．任意の $N \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathcal{H}$ $(0 \leq n \leq N)$ に対して

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{n=0}^{N} B_1^{*n}x_n \Big\|^2 &= \sum_{n,m=0}^{N} \langle B_1^{*n}x_n, B_1^{*m}x_m \rangle = \sum_{n,m=0}^{\infty} \langle B_1^{m}x_n, B_1^{n}x_m \rangle \\ &= \sum_{n,m=0}^{N} \langle A^{m}x_n, A^{n}x_m \rangle = \sum_{n,m=0}^{\infty} \langle B_0^{m}x_n, B_0^{n}x_m \rangle \\ &= \Big\| \sum_{n=0}^{N} B_0^{*n}x_n \Big\|^2. \end{aligned}$$

ゆえに，ユニタリー作用素 $\Gamma : \mathcal{K}_0 \to \mathcal{K}_1$ を

$$\Gamma\left(\sum_{n=0}^{N} B_0^{*n}x_n\right) = \sum_{n=0}^{N} B_1^{*n}x_n, \qquad x_n \in \mathcal{H},\ N \in \mathbb{N}$$

と定めることができて，$x \in \mathcal{H}$ に対して

$$\Gamma B_0 \Gamma^{-1}(B_1^{*n}x) = \Gamma(B_0 B_0^{*n}x) = \Gamma(B_0^{*n}Ax) = B_1^{*n}Ax = B_1(B_1^{*n}x)$$

であるから，$\Gamma B_0 \Gamma^{-1} = B_1$ が成立する． ■

上の証明より，$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の正規拡大 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が極小であるための必要十分条件は $\mathcal{K} = \bigvee_{n=0}^{\infty} B^{*n}\mathcal{H}$ であることがわかる．等距離作用素は明らかにクェーサイ正規，それゆえサブ正規であるが，このとき命題 6.3.7 は命題 6.2.5 に帰着する．

定理 6.3.8　$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ がサブ正規であり，その極小正規拡大を $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ とする．

(1) $\sigma(A) \supset \sigma(B)$.

(2) $r(A) = ||A|| = ||B||$.

(3) $\sigma_{\mathrm{ap}}(A) \subset \sigma(B)$.

(4) $\partial\sigma(A) \subset \partial\sigma(B)$.

(5) Δ を $\mathbb{C} \setminus \sigma(B)$ の連結成分とすると，$\Delta \subset \sigma(A)$ または $\Delta \cap \sigma(A) = \emptyset$.

証明　(1) $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $B - \lambda I$ が $A - \lambda I$ の極小正規拡大となるから，A が可逆ならば B が可逆を示せばよい．$B = \int \zeta dE(\zeta)$ を B のスペクトル分解とし，$\varepsilon||A^{-1}|| < 1$ となる $\varepsilon > 0$ をとって $\mathcal{M} = \operatorname{ran} E(D_\varepsilon(0))$ とおく．ここで $D_\varepsilon(0) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < \varepsilon\}$. $x \in \mathcal{H}$, $y \in \mathcal{M}$ のとき

$$
\begin{aligned}
|\langle x, y\rangle| &= |\langle A^n A^{-n} x, y\rangle| = |\langle B^n A^{-n} x, y\rangle| \\
&= |\langle A^{-n} x, B^{*n} y\rangle| \le ||A^{-n} x||\,||B^{*n} y|| \\
&= ||A^{-n} x||\,||B^n y|| \le \varepsilon^n ||A^{-n}||\,||x||\,||y|| \\
&\le (\varepsilon||A^{-1}||)^n ||x||\,||y|| \to 0 \ \ (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

よって $\langle x, y\rangle = 0$ となり $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}^\perp$. これより $B|\mathcal{M}^\perp$ が A の正規拡大となるから，極小性より $\mathcal{M}^\perp = \mathcal{K}$, i.e. $\mathcal{M} = \{0\}$. ゆえに B は可逆．

(2) (1) より $||B|| = r(B) \le r(A) \le ||A||$. また $||A|| \le ||B||$ は明らか．($r(A) = ||A||$ について，命題 6.3.10 参照.)

(3) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ap}}(A)$ とすると

$$
\begin{aligned}
&\inf\{||(\lambda I - B)x|| : x \in \mathcal{K},\ ||x|| = 1\} \\
&\qquad \le \inf\{||(\lambda I - A)x|| : x \in \mathcal{H},\ ||x|| = 1\} = 0.
\end{aligned}
$$

よって $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ap}}(B)$ だから $\sigma_{\mathrm{ap}}(A) \subset \sigma(B)$.

(4) 定理 3.1.20(4) より $\partial\sigma(A) \subset \sigma_{\mathrm{ap}}(A)$ だから，(3) より $\partial\sigma(A) \subset \sigma(B)$. これと (1) より，$\partial\sigma(A) \subset \partial\sigma(B)$ が従う．

(5) Δ を $\mathbb{C}\setminus\sigma(B)$ の連結成分とする．$\Delta_1 = \Delta\setminus\sigma(A)$, $\Delta_2 = \Delta\cap\sigma(A)$ とおくと，$\Delta = \Delta_1\cup\Delta_2$ かつ $\Delta_1\cap\Delta_2 = \emptyset$. Δ_1 は開集合である．そこで $\Delta_2 = \Delta\cap(\mathrm{int}\,\sigma(A))$ を示す．$\lambda\in\Delta_2$ かつ $\lambda\notin\mathrm{int}\,\sigma(A)$ とすると，$\lambda\in\partial\sigma(A)$ だから，(4) より $\lambda\in\sigma(B)$. これは $\lambda\in\Delta\subset\mathbb{C}\setminus\sigma(B)$ と矛盾．したがって $\Delta_2 = \Delta\cap(\mathrm{int}\,\sigma(A))$ が成立し，Δ_2 も開集合である．ゆえに $\Delta_1 = \emptyset$ または $\Delta_2 = \emptyset$. つまり結論がいえる． ■

クェーサイ正規，サブ正規作用素の詳しい特徴づけは後回しにして，ハイポ正規作用素について知られた結果を説明しよう．

命題 6.3.9 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ をハイポ正規とする．

(1) $Ax = \lambda x$ ならば $A^*x = \overline{\lambda}x$.

(2) $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, $\lambda\neq\mu$ ならば $x\perp y$.

(3) 閉部分空間 $\mathcal{M}\subset\mathcal{H}$ が $A\mathcal{M}\subset\mathcal{M}$ ならば，$A|\mathcal{M}$ はハイポ正規．

(4) A が可逆のとき，A^{-1} もハイポ正規．

証明 (1) A がハイポ正規だから

$$\begin{aligned}(A-\lambda I)(A-\lambda I)^* &= AA^* - \lambda A^* - \overline{\lambda}A + |\lambda|^2 I\\ &\leq A^*A - \lambda A^* - \overline{\lambda}A + |\lambda|^2 I\\ &= (A-\lambda I)^*(A-\lambda I).\end{aligned}$$

よって $Ax = \lambda x$ ならば $||(A-\lambda I)^*x|| \leq ||(A-\lambda I)x|| = 0$.

(2) (1) より $A^*y = \overline{\mu}y$ だから

$$\lambda\langle x,y\rangle = \langle Ax,y\rangle = \langle x,A^*y\rangle = \mu\langle x,y\rangle.$$

$\lambda\neq\mu$ より $\langle x,y\rangle = 0$.

(3) $A_0 = A|\mathcal{M}$ とおくと，任意の $x,y\in\mathcal{M}$ に対して

$$\langle A_0^*x,y\rangle = \langle x,A_0y\rangle = \langle x,Ay\rangle = \langle A^*x,y\rangle = \langle P_{\mathcal{M}}A^*x,y\rangle.$$

よって $A_0^* = P_{\mathcal{M}}A^*|\mathcal{M}$ となり，$x\in\mathcal{M}$ のとき

$$||A_0^*x|| = ||P_{\mathcal{M}}A^*x|| \leq ||A^*x|| \leq ||Ax|| = ||A_0x||.$$

(4) $A^*A \geq AA^*$ で A が可逆だから

$$A^{-1}(A^{-1})^* = (A^*A)^{-1} \leq (AA^*)^{-1} = (A^{-1})^*A^{-1}.$$

よって A^{-1} もハイポ正規. ■

次は命題 3.1.13 の拡張である.

命題 6.3.10 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ がハイポ正規ならば, $||A^n|| = ||A||^n$ $(n \in \mathbb{N})$ であり $r(A) = ||A||$.

証明 帰納法により $||A^n|| = ||A||^n$ を示す. $n = 1$ のときは自明. $1 \le k \le n$ に対して成立したとする.

$$\begin{aligned} ||A^n x||^2 &= \langle A^n x, A^n x\rangle = \langle A^* A^n x, A^{n-1}x\rangle \\ &\le ||A^* A^n x||\,||A^{n-1}x|| \le ||A^{n+1}x||\,||A^{n-1}x||. \end{aligned}$$

上の最後の不等式で A のハイポ正規性を使った. よって

$$||A^n||^2 \le ||A^{n+1}||\,||A^{n-1}||.$$

帰納法の仮定より $||A||^{2n} \le ||A^{n+1}||\,||A||^{n-1}$. ゆえに $||A||^{n+1} \le ||A^{n+1}||$ となり $||A^{n+1}|| = ||A||^{n+1}$. 最後に $r(A) = \lim_{n\to\infty} ||A^n||^{1/n} = ||A||$. ■

系 6.3.11 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ がハイポ正規とする. λ が $\sigma(A)$ の孤立点ならば, $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ で $\ker(\lambda I - A)$ は A を約する.

証明 命題 6.3.9 (1) の証明で見たように, $A - \lambda I$ もハイポ正規だから, $\lambda = 0$ として一般性を失わない. $\sigma(A) \setminus \{0\} \subset \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > \varepsilon\}$ となる $\varepsilon > 0$ と $r > \max\{||A||, \varepsilon\}$ をとって, 閉路 $|\zeta| = \varepsilon, |\zeta| = r$ をそれぞれ γ, γ' とおく. $E = (2\pi i)^{-1}\int_\gamma (\zeta I - A)^{-1} d\zeta$ と定めると, 定理 3.2.6 より $E^2 = E$, $I - E = (2\pi i)^{-1}\int_{\gamma^{-1}\cup\gamma'} (\zeta I - A)^{-1} d\zeta$ である. ここで γ^{-1} は γ を逆向きにした閉路. $\gamma^{-1} \cup \gamma'$ が $\sigma(A) \setminus \{0\}$ を正の向きに囲むから, 定理 3.2.6 より

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^{-1}\cup\gamma'} \zeta^{-1}(\zeta I - A)^{-1} d\zeta\right)(I - E)A \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^{-1}\cup\gamma'} \zeta^{-1}(\zeta I - A)^{-1} d\zeta\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^{-1}\cup\gamma'} (\zeta I - A)^{-1} d\zeta\right) \\ &\qquad \times \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \zeta(\zeta I - A)^{-1} d\zeta\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^{-1}\cup\gamma'} (\zeta I - A)^{-1} d\zeta = I - E. \end{aligned}$$

これより，$E=0$ とすると A が可逆となり $0\in\sigma(A)$ に反するから，$E\neq 0$ がわかる．$\mathcal{M}=\operatorname{ran}E=\ker(I-E)$ とおくと，$\mathcal{M}$ は $\{0\}$ でない閉部分空間で $A\mathcal{M}\subset\mathcal{M}$, $\ker A\subset\mathcal{M}$ である．さらに，任意の $\lambda\neq 0$ に対して，$(\lambda I-A)|\mathcal{M}$ が可逆であることは定理 3.2.6 を使って容易に示せる．したがって $\sigma(A|\mathcal{M})=\{0\}$. 命題 6.3.9 (3) より $A|\mathcal{M}$ もハイポ正規だから，定理 6.3.10 より $A|\mathcal{M}=0$. これより $0\in\sigma_{\mathrm{p}}(A)$ で $\mathcal{M}=\ker A$. 命題 6.3.9 (1) より $A^*\mathcal{M}=\{0\}$ だから，$\mathcal{M}$ は A を約する． ■

系 6.3.12 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ が完全非正規なハイポ正規作用素ならば，$\sigma_{\mathrm{p}}(A)=\emptyset$ で $\sigma(A)$ は孤立点をもたない．

証明 $\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(A)$ とすると，$\ker(\lambda I-A)$ が A を約し $A|\ker(\lambda I-A)$ が正規であるから，A の完全非正規性に反する．よって $\sigma_{\mathrm{p}}(A)=\emptyset$. したがって，系 6.3.11 より $\sigma(A)$ は孤立点をもたない． ■

系 6.3.13 $A\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$ がハイポ正規ならば A は正規である．

証明 $A\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$ がハイポ正規とする．定理 4.1.7 より $\sigma(A)\setminus\{0\}=\{\lambda_n\}$ と書けて，無限列のとき $\lambda_n\to 0$ $(n\to\infty)$. 命題 6.3.9 (2) と系 6.3.11 より，$\mathcal{M}_n=\ker(\lambda_n I-A)$ は互いに直交し A を約する．よって任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して，$\oplus_{n=1}^{N}\mathcal{M}_n$ が A を約するから，$\oplus_{n=1}^{N}\mathcal{M}_n$ 上への射影を P_N とすると $\sigma(A(I-P_N))=\sigma(A)\setminus\{\lambda_n\}_{n=1}^{N}$. また $AP_N=\sum_{n=1}^{N}\lambda_n P_{\mathcal{M}_n}$ は正規．$A(I-P_N)$ がハイポ正規だから，定理 6.3.10 より

$$||A(I-P_N)||=\sup_{n>N}|\lambda_n|\to 0\ \ (N\to\infty).$$

$\{B\in\mathcal{B}(\mathcal{H}):$ 正規 $\}$ がノルム閉だから，A は正規である．(特に $A\in\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ のときは，$A^*A\geq AA^*$ のトレースをとるだけで示せることに注意する.) ■

命題 6.3.14 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ がハイポ正規のとき

$$\sigma(A)\setminus\sigma_{\mathrm{W}}(A) = \{\lambda\in\mathbb{C}:\sigma(A)\ \text{の孤立点かつ重複度が有限}\ A\ \text{の固有値}\}. \tag{6.19}$$

さらに，A が完全非正規ならば，任意の $K\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$ に対して $||A||\leq||A+K||$.

証明 λ が $\sigma(A)$ の孤立点で，重複度が有限の A の固有値とする．系 6.3.11 より $\mathcal{M}=\ker(\lambda I-A)$ が A を約する．いま，$\lambda\in\sigma(A|\mathcal{M}^{\perp})$ とすると，系 6.3.11 より $\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(A|\mathcal{M}^{\perp})$ となり，$\mathcal{M}$ のとり方に反する．ゆえに $\lambda\notin\sigma(A|\mathcal{M}^{\perp})$. $P_{\mathcal{M}}\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$ であり，$\sigma(A-P_{\mathcal{M}})=\{\lambda-1\}\cup\sigma(A|\mathcal{M}^{\perp})$ だから $\lambda\notin\sigma(A-P_{\mathcal{M}})$. したがって $\lambda\notin\sigma_{\mathrm{W}}(A)$. 逆に，$\lambda\in\sigma(A)\setminus\sigma_{\mathrm{W}}(A)$ とすると，(6.6) より $\lambda I-A\in\mathcal{F}(\mathcal{H}), \mathrm{ind}(\lambda I-A)=0$. 命題 6.3.9 (1) より $\ker(\lambda I-A)\subset\ker(\lambda I-A)^*$. これと $\mathrm{ind}(\lambda I-A)=0$ より，$\ker(\lambda I-A)=\ker(\lambda I-A)^*$. これが $\{0\}$ とすると，$\lambda I-A$ が可逆となり $\lambda\in\sigma(A)$ に反する．したがって $\ker(\lambda I-A)\neq\{0\}$ だから，λ は重複度が有限の固有値である．このとき，$\mathcal{M}=\ker(\lambda I-A)$ が A を約し，$\sigma(A)=\sigma(A|\mathcal{M})\cup\sigma(A|\mathcal{M}^{\perp})=\{\lambda\}\cup\sigma(A|\mathcal{M}^{\perp})$. ところで，$\lambda I-A\in\mathcal{F}(\mathcal{H})$ より $\mathrm{ran}(\lambda I-A)$ が閉だから

$$(\lambda I-A)\mathcal{M}^{\perp}=\mathrm{ran}(\lambda I-A)=(\ker(\lambda I-A)^*)=\mathcal{M}^{\perp}.$$

よって $(\lambda I-A)|\mathcal{M}^{\perp}$ が全単射であり，それゆえ可逆だから，$\lambda\notin\sigma(A|\mathcal{M}^{\perp})$. これより λ は $\sigma(A)$ の孤立点である．

さらに，A が完全非正規のとき，系 6.3.12 と (6.19) より $\sigma(A)=\sigma_{\mathrm{W}}(A)$. よって任意の $K\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$ に対して，$\sigma(A)\subset\sigma(A+K)$ だから，定理 6.3.10 より $\|A\|=r(A)\le r(A+K)\le\|A+K\|$. ■

特に，$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ が正規ならば，系 6.1.20 より，$\sigma(A)\setminus\sigma_{\mathrm{e}}(A)$ が (6.19) の集合と一致する．

A. ブラウンは，クェーサイ正規作用素を導入した論文で次の構造定理を示した．

定理 6.3.15　$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ について次は同値：

(i) A が完全非正規なクェーサイ正規作用素；

(ii) $\ker Q=\{0\}$ の正作用素 $Q\in\mathcal{B}(\mathcal{L})$ が存在して，A が $\mathcal{H}_1=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}_n$ ($\mathcal{L}_n=\mathcal{L}$) 上の作用素 $A_1(x_0,x_1,x_2,\ldots)=(0,Qx_0,Qx_1,\ldots)$ とユニタリー同値である．

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii). A が完全非正規かつクェーサイ正規とし，極分解 $A=V|A|$ をとる．命題 6.3.9 (1) より $\ker A$ が A を約するから，A の完全非正規性より $\ker A=\{0\}$. ゆえに V は等距離作用素である．命題 6.3.3, 6.3.7 より，$B\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ を A の極小正規拡大とし，極分解 $B=U|B|$ をとる．命題

6.3.9 (3) の証明より $A^* = P_{\mathcal{H}}B^*|\mathcal{H}$ がわかる．よって任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned} ||P_{\mathcal{H}}B^*Bx||^2 &= ||A^*Ax||^2 = \langle Ax, AA^*Ax\rangle \\ &= \langle Ax, A^*A^2x\rangle = ||A^2x||^2 \\ &= ||B^2x||^2 = ||B^*Bx||^2. \end{aligned}$$

上の 3 番目の等号で A がクェーサイ正規であることを使った．上の等式から $B^*Bx \in \mathcal{H}$ となり，それゆえ $A^*Ax = B^*Bx$. よって $y \in \ker B$ のとき，$\langle |A|^2x, y\rangle = \langle Bx, By\rangle = 0$. $\overline{\mathrm{ran}}\,|A|^2 = (\ker A)^\perp = \mathcal{H}$ だから，$\mathcal{H} \subset (\ker B)^\perp$ がいえる．$(\ker B)^\perp$ が B を約するから，B の極小性より $(\ker B)^\perp = \mathcal{K}$, i.e. $\ker B = \{0\}$. これより U はユニタリーである．また，$A|A| = |A|A$ より $(V|A| - |A|V)|A| = 0$ となり，$\overline{\mathrm{ran}}\,|A| = \mathcal{H}$ だから $V|A| = |A|V$ が従う．さらに，$|A|^2 = |B|^2|\mathcal{H}$ から $|A|, |B|$ を $|A|^2, |B|^2$ の多項式でノルム近似すれば，$|A| = |B|\,|\mathcal{H}$ が得られる．これより $V = U|\mathcal{H}$ も成立．

次に，V のウォルド分解を $V = (V|\mathcal{H}_0) \oplus (V|\mathcal{H}_0^\perp)$ とすると，$\mathcal{H}_0 = \bigcap_{n=1}^\infty V^n\mathcal{H}$ である (演習問題 6.6)．すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$BV^n\mathcal{H} = BU^n\mathcal{H} = U^nB\mathcal{H} \subset V^n\mathcal{H},$$

$$B^*V^n\mathcal{H} = |B|U^*U^n\mathcal{H} = |B|U^{n-1}\mathcal{H} = U^{n-1}|B|\mathcal{H} \subset V^{n-1}\mathcal{H}.$$

ゆえに $B\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$ かつ $B^*\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$ となり，$\mathcal{H}_0$ は B を約する．このとき，$A\mathcal{H}_0 = B\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$ かつ $A^*\mathcal{H}_0 = P_{\mathcal{H}}B^*\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$ となり，$\mathcal{H}_0$ は A も約する．$A|\mathcal{H}_0 = B|\mathcal{H}_0$ が正規だから，A の完全非正規性より $\mathcal{H}_0 = \{0\}$ がいえて，V は完全非ユニタリー (i.e. 片側シフト作用素) となる．よって命題 6.2.4 (とその証明) より，$\mathcal{L} = \mathcal{H} \ominus V\mathcal{H}$ とおいて $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^\infty V^n\mathcal{L}$. $V|A| = |A|V$ より $|A|\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ が簡単にわかる．したがって，$\ker Q = \{0\}$ である正作用素 $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{L})$ を $Q = |A|\,|\mathcal{L}$ と定義できる．$\mathcal{H}_1 = \bigoplus_{n=0}^\infty \mathcal{L}_n$ ($\mathcal{L}_n = \mathcal{L}$) とおいて，ユニタリー作用素 $\Gamma : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}$ を $\Gamma(x_n) = \sum_{n=0}^\infty V^nx_n$ と定める．このとき

$$\begin{aligned} A\Gamma(x_n) &= \sum_{n=0}^\infty AV^nx_n = \sum_{n=0}^\infty V|A|V^nx_n \\ &= \sum_{n=0}^\infty V^{n+1}Qx_n = \Gamma(0, Qx_0, Qx_1, \ldots). \end{aligned}$$

ゆえに (ii) が示せた．

(ii) $\Longrightarrow$ (i). (ii) の A_1 について示せばよい．

$$A_1^*(x_n) = (Qx_1, Qx_2, \ldots), \qquad (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{H}_1$$

が簡単に確かめられる．よって $A_1 A_1^* A_1 = A_1^* A_1^2$ は容易．$\mathcal{H}_1$ の閉部分空間 $\mathcal{M}$ が A_1 を約し，$A_1|\mathcal{M}$ が正規とする．$(x_n) \in \mathcal{M}$ のとき，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して，$A_1^m|\mathcal{M}$ が正規だから

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Q^m x_n\|^2 = \|A_1^m(x_n)\|^2 = \|A_1^{*m}(x_n)\|^2 = \sum_{n=m}^{\infty} \|Q^m x_n\|^2.$$

よって $0 \leq n < m$ に対して $Q^m x_n = 0$ となり，$\ker Q = \{0\}$ より $x_n = 0$. ゆえに $(x_n) = 0$ となり $\mathcal{M} = \{0\}$ が示せた．つまり A_1 は完全非正規である．■

前定理の A_1 を行列表示すると

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ Q & 0 & & \mathbf{0} \\ 0 & Q & & \\ & & Q & \\ \mathbf{0} & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

サブ正規作用素に対する特徴づけは，最初ハルモスによって与えられ，ブラムやエンブリィによって改良された．次の定理はそれらをまとめたものである．ここで，正作用素測度とそれによる積分については，前節の定義 6.2.16 以下を参照．

定理 6.3.16　$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について次は同値：

(i) A がサブ正規；

(ii) 任意の $N \in \mathbb{N}$ と $x_0, \ldots, x_N \in \mathcal{H}$ に対して

$$\sum_{n,m=0}^{N} \langle A^m x_n, A^n x_m \rangle \geq 0;$$

(iii) 任意の $N \in \mathbb{N}$ と $x_0, \ldots, x_N \in \mathcal{H}$ に対して

$$\sum_{n,m=0}^{N} \langle A^{n+m} x_n, A^{n+m} x_m \rangle \geq 0;$$

(iv) コンパクト集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の正作用素測度 $Q : \mathcal{B}_\Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ が存在して

$$A^{*n}A^m = \int \bar{\zeta}^n \zeta^m dQ(\zeta), \qquad n, m \geq 0;$$

(v) コンパクト集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の正作用素測度 $Q : \mathcal{B}_\Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ が存在して

$$A = \int \zeta dQ(\zeta), \quad A^*A = \int |\zeta|^2 dQ(\zeta);$$

(vi) 区間 $[0, a]$ 上の正作用素測度 $Q : \mathcal{B}_{[0,a]} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ が存在して

$$A^{*n}A^n = \int \lambda^{2n} dQ(\lambda), \qquad n \geq 0.$$

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii). $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ を A の正規拡大とすると，任意の $x_0, \ldots, x_N \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\sum_{n,m=0}^{N} \langle A^m x_n, A^n x_m \rangle \\
&\quad = \sum_{n,m=0}^{N} \langle B^m x_n, B^n x_m \rangle = \sum_{n,m=0}^{N} \langle B^{*n} B^m x_n, x_m \rangle \\
&\quad = \sum_{n,m=0}^{N} \langle B^m B^{*n} x_n, x_m \rangle = \sum_{n,m=0}^{N} \langle B^{*n} x_n, B^{*m} x_m \rangle \\
&\quad = \Big\| \sum_{n=0}^{N} B^{*n} x_n \Big\| \geq 0.
\end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). (ii) で x_n として $A^n x_n$ をとればよい．

(iii) $\Longrightarrow$ (i). A の正数倍をとればよいから，$\|A\| < 1$ として十分である．まず，任意の $x_0, \ldots, x_N$ に対して

$$\sum_{n,m=0}^{N} \langle A^{n+m+1} x_n, A^{n+m+1} x_m \rangle \leq \sum_{n,m=0}^{N} \langle A^{n+m} x_n, A^{n+m} x_m \rangle \tag{6.20}$$

を示す．$\mathbf{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$ $(\mathcal{H}_n = \mathcal{H})$ とおいて，$\mathbf{A} \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ を $\mathbf{A}(x_n) = (Ax_n)$ と定める．このとき $\mathbf{A}^*(x_n) = (A^* x_n)$. ところで，$x_0, \ldots, x_N$ に対して

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Big\| \sum_{n=0}^{N} A^{*n+m} A^{n+m} x_n \Big\|^2 \;\; \leq \;\; \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=0}^{N} \|A\|^{2(n+m)} \|x_n\| \Big)^2$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}||A||^{4(n+m)}\right)\left(\sum_{n=0}^{N}||x_n||^2\right)\\
&\le \left(\sum_{n,m=0}^{\infty}||A||^{4(m+n)}\right)\left(\sum_{n=0}^{N}||x_n||^2\right)\\
&= \frac{1}{(1-||A||^4)^2}\sum_{n=0}^{N}||x_n||^2.
\end{aligned}
$$

よって $\mathbf{H}$ の稠密な線型部分空間 $\mathbf{H}_0 = \{(x_n) \in \mathbf{H} :$ ある $N \in \mathbb{N}$ で $x_n = 0\ (n > N)\}$ 上で

$$
\mathbf{B}(x_0, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots) = \left(\sum_{n=0}^{N} A^{*n+m}A^{n+m}x_n\right)_{m=0}^{\infty}
$$

と定めると，$\mathbf{B} : \mathbf{H}_0 \to \mathbf{H}$ は有界な線型作用素となり，それゆえ $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ の要素に一意的に拡張できる．これを同じ $\mathbf{B}$ で表す．各 $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{Bx}, \mathbf{x}\rangle &= \sum_{m=1}^{N}\left\langle \sum_{n=0}^{N} A^{*n+m}A^{n+m}x_n, x_m\right\rangle\\
&= \sum_{n,m=0}^{N}\langle A^{n+m}x_n, A^{n+m}x_m\rangle \ge 0.
\end{aligned}
$$

したがって $\mathbf{B} \ge 0$. また，$\mathbf{A}^*\mathbf{BAx} = (\sum_{n=0}^{N} A^{*n+m+1}A^{n+m+1}x_n)_{m=0}^{\infty}$ だから

$$
\begin{aligned}
||\mathbf{A}^*\mathbf{BAx}||^2 &= \sum_{m=0}^{\infty}\left|\left|\sum_{n=0}^{N} A^{*n+m+1}A^{n+m+1}x_n\right|\right|^2\\
&\le \sum_{m=0}^{\infty}\left|\left|\sum_{n=0}^{N} A^{*n+m}A^{n+m}x_n\right|\right| \le ||\mathbf{Bx}||^2.
\end{aligned}
$$

これより $(\mathbf{A}^*\mathbf{BA})^2 \le \mathbf{B}^2$ が得られる．$\mathbf{B}, \mathbf{A}^*\mathbf{BA} \ge 0$ だから，定理 5.1.1 より $\mathbf{A}^*\mathbf{BA} \le \mathbf{B}$. ゆえに $\langle \mathbf{A}^*\mathbf{BAx}, \mathbf{x}\rangle \le \langle \mathbf{Bx}, \mathbf{x}\rangle$ がいえるが，これを書き下すと (6.20) になる．

いま，$\mathbf{H}_0$ の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ とは別に，$\mathbf{x} = (x_n)$, $\mathbf{y} = (y_n) \in \mathbf{H}_0$ に対して

$$
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_0 = \sum_{n,m}\langle A^{n+m}x_n, A^{n+m}y_m\rangle
$$

と定めると，明らかに $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ は $\mathbf{H}_0$ 上の双線型汎関数で (iii) より正定値である．$\mathbf{N}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{H}_0 : \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle_0 = 0\}$ とすると，定理 6.2.14 の証明と同様に $\mathbf{N}_0$ は $\mathbf{H}_0$ の線型部分空間となる．商空間 $\mathbf{H}_0/\mathbf{N}_0$ をとり，$[\mathbf{x}] = \mathbf{x} + \mathbf{N}_0$, $[\mathbf{y}] = \mathbf{y} + \mathbf{N}_0 \in \mathbf{H}_0/\mathbf{N}_0$ に対して $\langle[\mathbf{x}],[\mathbf{y}]\rangle = \langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_0$ と定めると，$\mathbf{H}_0/\mathbf{N}_0$ は内積空間になる．これの完備化ヒルベルト空間を $\mathcal{K}$ とする．$x \in \mathcal{H} \mapsto [(x,0,0,\ldots)] = (x,0,0,\ldots) + \mathbf{N}_0 \in \mathcal{K}$ が等距離作用素であるから，x と $[(x,0,0,\ldots)]$ を同一視して $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ とみなす．上で定めた $\mathbf{A}$ について，(6.20) より

$$\langle\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{x}\rangle_0 = \sum_{n,m}\langle A^{n+m+1}x_n, A^{n+m+1}x_m\rangle \le \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle_0, \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{H}_0.$$

これより $\mathbf{H}_0/\mathbf{N}_0$ 上の線型作用素 R を $R[\mathbf{x}] = [\mathbf{A}\mathbf{x}]$ と定義できて，$\|R[\mathbf{x}]\| \le \|[\mathbf{x}]\|$. よって R は $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ の要素に拡張できる．これを同じ R で表す．このとき，任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$R[(x,0,0,\ldots)] = [\mathbf{A}(x,0,0,\ldots)] = [(Ax,0,0,\ldots)]$$

だから，$R|\mathcal{H} = A$ となる．$\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{H}_0$ に対して

$$\begin{aligned}\langle R^*R[\mathbf{x}],[\mathbf{y}]\rangle &= \langle\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{y}\rangle_0 = \sum_{n,m}\langle A^{n+m+1}x_n, A^{n+m+1}y_m\rangle \\ &= \langle[(0,x_0,x_1,\ldots)],[\mathbf{y}]\rangle.\end{aligned}$$

よって $R^*R[\mathbf{x}] = [(0,x_0,x_1,\ldots)]$ だから

$$RR^*R[\mathbf{x}] = [(0,Ax_0,Ax_1,\ldots)] = R^*R[(Ax_0,Ax_1,\ldots)] = R^*R^2[\mathbf{x}].$$

ゆえに $RR^*R = R^*R^2$, すなわち R はクェーサイ正規である．命題 6.3.3 より R の正規拡大がとれて，これは $R|\mathcal{H} = A$ より A の正規拡大になる．

(i) $\Longrightarrow$ (iv). $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ を A の正規拡大として，$B = \int \zeta dE(\zeta)$ を B のスペクトル分解とする．ここで，E は $\sigma(B)$ 上のスペクトル測度である．$S \in \mathcal{B}_{\sigma(B)}$ に対して $Q(S) = P_{\mathcal{H}}E(S)|\mathcal{H}$ と定めると，Q は $\sigma(B)$ 上の正作用素測度になる．任意の $x \in \mathcal{H}$ と $n,m \ge 0$ に対して

$$\begin{aligned}\langle A^{*n}A^m x,x\rangle &= \langle A^m x, A^n x\rangle = \langle B^m x, B^n x\rangle \\ &= \langle B^{*n}B^m x,x\rangle = \int \overline{\zeta}^n\zeta^m d\langle E(\zeta)x,x\rangle \\ &= \int \overline{\zeta}^n\zeta^m d\langle P_{\mathcal{H}}E(\zeta)x,x\rangle = \int \overline{\zeta}^n\zeta^m d\langle Q(\zeta)x,x\rangle.\end{aligned}$$

よって $A^{*n}A^m = \int \overline{\zeta}^n \zeta^m dQ(\zeta)$.

(iv) $\Longrightarrow$ (v) は明らか．

(v) $\Longrightarrow$ (i). (v) の条件を満たす正作用素測度 $Q : \mathcal{B}_\Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ が存在したとする．定理 6.2.18 より，ヒルベルト空間 $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ とスペクトル測度 $E : \mathcal{B}_\Omega \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ が存在して $Q(S) = P_\mathcal{H}E(S)|\mathcal{H}$ $(S \in \mathcal{B}_\Omega)$. $B = \int \zeta dE(\zeta) \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ は正規である．任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned}\langle Ax, x\rangle &= \int \zeta d\langle Q(\zeta)x, x\rangle = \int \zeta d\langle P_\mathcal{H}E(\zeta)x, x\rangle \\ &= \int \zeta d\langle E(\zeta)x, x\rangle = \langle Bx, x\rangle = \langle P_\mathcal{H}Bx, x\rangle.\end{aligned}$$

よって $A = P_\mathcal{H}B|\mathcal{H}$. さらに，$x \in \mathcal{H}$ のとき

$$\begin{aligned}||Ax||^2 &= \langle A^*Ax, x\rangle = \int |\zeta|^2 d\langle Q(\zeta)x, x\rangle \\ &= \int |\zeta|^2 d\langle E(\zeta)x, x\rangle = \langle B^*Bx, x\rangle = ||Bx||^2.\end{aligned}$$

したがって $||P_\mathcal{H}Bx|| = ||Bx||$ となり $Bx \in \mathcal{H}$ が従う．これより $A = B|\mathcal{H}$ が成立する．

(iv) $\Longrightarrow$ (vi). Q を (iv) の正作用素測度とするとき，$a = \max\{|\zeta| : \zeta \in \Omega\}$ として $\tilde{Q}(S) = Q(\tau^{-1}(S))$ $(S \in \mathcal{B}_{[0,a]})$ と定める．ここで $\tau(\zeta) = |\zeta|$. 明らかに $\tilde{Q}$ は $[0, a]$ 上の正作用素測度であり，任意の $x \in \mathcal{H}$ と $n \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}\langle A^{*n}A^n x, x\rangle &= \int \tau(\zeta)^{2n} d\langle Q(\zeta)x, x\rangle = \int \lambda^{2n} d\langle (Q \circ \tau^{-1})(\lambda)x, x\rangle \\ &= \int \lambda^{2n} d\langle \tilde{Q}(\lambda)x, x\rangle.\end{aligned}$$

よって $A^{*n}A^n = \int \lambda^{2n} d\tilde{Q}(\lambda)$.

(vi) $\Longrightarrow$ (iii). Q を (vi) の正作用素測度とする．$\Phi(f) = \int f dQ$ $(f \in C([0, a]))$ と定めると，補題 6.2.17 より $\Phi : C([0, a]) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は正値の線型写像である．ゆえに定理 6.2.14 より，ヒルベルト空間 $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$, $*$-表現 $\pi : C([0, a]) \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$, $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ が存在して，$\Phi(f) = V^*\pi(f)V$ $(f \in C([0, a]))$. よって任意の $x_0, \ldots, x_N \in \mathcal{H}$ に対して

$$\sum_{n,m=0}^{N} \langle A^{n+m}x_n, A^{n+m}x_m\rangle = \sum_{n,m=0}^{N} \langle \Phi(\lambda^{2(n+m)})x_n, x_m\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n,m=0}^{N} \langle V^*\pi(\lambda^{2m}\lambda^{2n})Vx_n, x_m\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{N} ||\pi(\lambda^{2n})Vx_n||^2 \geq 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

サブ正規作用素は次のように位相的にすっきりと特徴づけられる．この定理はビショップによって証明された．

定理 6.3.17 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について次は同値：

(i) A がサブ正規；

(ii) A が $\{B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \text{正規}\}$ の強作用素位相による閉包に属する．

さらに $\mathcal{H}$ が可分のとき，上の条件は次とも同値：

(iii) 正規作用素の列 $\{B_n\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在して $B_n \xrightarrow{\text{SOT}} A$.

証明 簡単のため，$\mathcal{H}$ が可分のときに (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) を示すにとどめる．一般の $\mathcal{H}$ でも，(i) $\Longrightarrow$ (ii) は下の (i) $\Longrightarrow$ (iii) とほぼ同様に示せるが，(ii) $\Longrightarrow$ (i) はやや難しい．

(i) $\Longrightarrow$ (iii). 命題 6.3.7 とその下で注意したことから，A の極小正規拡大 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ が存在して $\mathcal{K} = \bigvee_{n=0}^{\infty} B^{*n}\mathcal{H}$. $\mathcal{H}$ を可分としたので，$\mathcal{K}$ も可分となる．$\dim \mathcal{H} < +\infty$ ならば，系 6.3.13 より A 自身が正規だから問題ない．そこで $\dim \mathcal{H} = \aleph_0$ として，$\mathcal{H}$ の CONS $\{e_n\}$ をとる．任意の n に対して，$\mathcal{H}_n = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n, Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ とすると，ユニタリー作用素 $U_n : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ で $U_n|\mathcal{H}_n$ が $\mathcal{H}_n$ 上の恒等作用素となるものがとれる．$B_n = U_n^* B U_n$ とおくと，$B_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は正規作用素で $||B_n|| \leq ||B||$ である．$k = 1, \ldots, n$ に対して

$$
B_n e_k = U_n^* B e_k = U_n^* A e_k = A e_k.
$$

これより $B_n \xrightarrow{\text{SOT}} A$ が得られる．

(iii) $\Longrightarrow$ (i). 正規作用素の列 $\{B_k\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在して $B_k \xrightarrow{\text{SOT}} A$ とする．定理 1.3.3 より $\sup_n ||B_k|| < +\infty$. 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して

$$
\begin{aligned}
||(B_k^2 - A^2)x|| &\leq ||B_k(B_k - A)x|| + ||(B_k - A)Ax|| \\
&\leq ||B_k||\,||(B_k - A)x|| + ||(B_k - A)Ax|| \to 0.
\end{aligned}
$$

よって $B_k^2 \xrightarrow{\text{SOT}} A^2$. 同様な議論をくり返して，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $B_k^n \xrightarrow{\text{SOT}} A^n$ $(k \to \infty)$. ゆえに任意の $x_0, \ldots, x_N \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=0}^{N} \langle A^m x_n, A^n x_m \rangle &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n,m=0}^{N} \langle B_k^m x_n, B_k^n x_m \rangle \\ &= \lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{n=0}^{N} B_k^{*n} x_n \right\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

となり，定理 6.3.16 の (ii) が成立するから，A はサブ正規である．■

この節の最後に，ハイポ正規，サブ正規作用素に関する 2 つの有名な定理を紹介しておこう．1 つはハイポ正規作用素の交換子に関するバーガー-ショーの定理であり，もう 1 つはサブ正規作用素の不変部分空間の存在に関する S. ブラウンの定理である．証明は本書のレベルを越えるので割愛する．

Ω が $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合のとき，極が Ω の外にある有理関数の全体を $\mathrm{Rat}(\Omega)$ で表す．$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が**有限多重巡回的**であるとは，有限個の $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ が存在して

$$\mathcal{H} = \bigvee \{ f(A) x_k : f \in \mathrm{Rat}(\sigma(A)),\ 1 \leq k \leq n \}$$

となるときをいう．ここで，$f(A)$ は A の解析関数カルキュラスであるが，実際 $f = p/q$ (p, q は多項式) のとき，$f(A) = p(A)q(A)^{-1}$ で定まる．A が有限多重巡回的として，上のような $x_1, \ldots, x_n$ の最小個数が m のとき，A を m-**多重巡回的**という．

定理 6.3.18 (バーガー-ショーの定理)　$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が m-多重巡回的なハイポ正規作用素ならば，$[A^*, A] = A^*A - AA^*$ は $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ に属し

$$\mathrm{tr}\,[A^*, A] \leq \frac{m}{\pi} \mathrm{Area}(\sigma(A)).$$

ここで，$\mathrm{Area}(\sigma(A))$ は $\sigma(A)$ のルベーグ面積測度を表す．

いま，$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ がハイポ正規のとき，任意の $x \in \mathcal{H}$, $\|x\| = 1$ に対して $\mathcal{H}_0 = \bigvee \{ f(A)x : f \in \mathrm{Rat}(\sigma(A)) \}$ とおく．$A\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$ だから $A_0 = A|\mathcal{H}_0$ とおくと，命題 6.3.9 (3) より A_0 もハイポ正規．$\lambda \notin \sigma(A)$ ならば，$(\lambda - \zeta)^{-1} \in \mathrm{Rat}(\sigma(A))$ より $\mathcal{H}_0$ が $(\lambda I - A)^{-1}$ に対し不変であり，$(\lambda I - A)^{-1}|\mathcal{H}_0 =$

$(\lambda I - A_0)^{-1}$ となる．これより $\sigma(A_0) \subset \sigma(A)$ で，それゆえ A_0 は 1-多重巡回的である．上の定理より

$$\begin{aligned}\langle [A_0^*, A_0]x, x\rangle &\leq \operatorname{tr}[A_0^*, A_0] \leq \frac{1}{\pi}\mathrm{Area}(\sigma(A_0)) \\ &\leq \frac{1}{\pi}\mathrm{Area}(\sigma(A)).\end{aligned}$$

他方，$A_0^* = P_{\mathcal{H}_0}A^*|\mathcal{H}_0$ より

$$\begin{aligned}\langle [A^*, A]x, x\rangle &= ||Ax||^2 - ||A^*x||^2 \leq ||A_0x||^2 - ||A_0^*x||^2 \\ &= \langle [A_0^*, A_0]x, x\rangle.\end{aligned}$$

ゆえに $\langle [A^*, A]x, x\rangle \leq (1/\pi)\mathrm{Area}(\sigma(A))$. これがすべての $x \in \mathcal{H}$, $||x|| = 1$ に対して成立するから，次の系を得る．これは系 6.3.13 の大幅な拡張である．

系 6.3.19 (パットナムの不等式) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ がハイポ正規ならば

$$||[A^*, A]|| \leq \frac{1}{\pi}\mathrm{Area}(\sigma(A)).$$

特に，$\mathrm{Area}(\sigma(A)) = 0$ ならば A は正規である．

いわゆる**不変部分空間問題**とは，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ただし $\dim\mathcal{H} \geq 2$) に対して，$\{0\}, \mathcal{H}$ 以外の閉部分空間 $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ で $A\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ となるものが存在するかという問題である．これはヒルベルト空間上の作用素論における最大の未解決問題である．A が正規作用素のときは，スペクトル分解定理の系として，このような非自明な A の不変部分空間の存在がいえる．また $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ のときも，A は非自明な不変部分空間をもつ．実は，このことは一般のバナッハ空間上のコンパクト作用素でも成立する (**アロンシャイン-スミスの定理**)．なお，バナッハ空間上の有界作用素の場合は，非自明な不変部分空間をもたない例がリードにより与えられた．

不変部分空間問題における最も重要な成果が S. ブラウンによる次の定理である．

定理 6.3.20 (S. ブラウンの定理) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ がサブ正規ならば，A は非自明な不変部分空間をもつ．

6.4　バナッハ空間上の測度

この節では，これまでと趣旨をかなり変えて，バナッハ空間上の確率測度について基本的な事柄を説明しよう．共分散作用素と特性関数が話題の中心である．

X を実 $(\mathbb{K}=\mathbb{R})$ バナッハ空間とし，X^* を X の双対空間とする．X と X^* の双対関係を $\langle x, x^*\rangle = x^*(x)$ $(x \in X,\ x^* \in X^*)$ で書く．

定義 6.4.1　X のボレル σ-集合体，すなわち X の開集合全体で生成される σ-集合体を $\mathcal{B}_X$ で表す．また，すべての $x^* \in X^*$ を可測にする最小の σ-集合体を $\mathcal{B}_X[X^*]$ で表す．つまり，$\mathcal{B}_X[X^*]$ は $\{x \in X : \langle x, x^*\rangle < \alpha\}$ $(x^* \in X^*,\ \alpha \in \mathbb{R})$ の形の集合全体から生成される σ-集合体である．あるいは次のように定義してもよい．F を X^* の有限次元の部分空間とする．$\{x_1^*, \ldots, x_n^*\} \subset F$ と $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ により定まる集合

$$\{x \in X : (\langle x, x_1^*\rangle, \ldots, \langle x, x_n^*\rangle) \in D\}$$

を F に基づいた**筒集合**といい，このような筒集合全体を $\mathcal{C}_X[F]$ とおく．ここで

$$\mathcal{C}_X[X^*] = \bigcup\{\mathcal{C}_X[F] : F \text{ は } X^* \text{ の有限次元部分空間 }\}$$

とすると，$\mathcal{C}_X[X^*]$ は集合体となる．このとき，$\mathcal{B}_X[X^*]$ は $\mathcal{C}_X[X^*]$ によって生成される σ-集合体である．

明らかに $\mathcal{B}_X[X^*] \subset \mathcal{B}_X$ であるが，X が可分のときは次が成立する．

命題 6.4.2　X が可分ならば $\mathcal{B}_X[X^*] = \mathcal{B}_X$.

証明　X の可分性より X で稠密な点列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ が選べる．ハーン-バナッハの定理 (付録の系 A.1.7) より，各 k に対して，$||x_k^*|| = 1$ で $\langle x_k, x_k^*\rangle = ||x_k||$ となる $x_k^* \in X^*$ がとれる．いま，任意の $x_0 \in X$ と $r > 0$ に対して $\overline{B}_r(x_0) = \{x \in X : ||x - x_0|| \leq r\}$ (中心 x_0, 半径 r の閉球) とおく．このとき

$$\overline{B}_r(x_0) = \bigcap_{k=1}^{\infty}\{x \in X : \langle x, x_k^*\rangle \leq \langle x_0, x_k^*\rangle + r\} \tag{6.21}$$

であることを示す．$x \in \overline{B}_r(x_0)$ ならば $\langle x - x_0, x_k^* \rangle \leq ||x - x_0|| \, ||x_k^*|| \leq r$ だから，$\overline{B}_r(x_0)$ は (6.21) の右辺に含まれる．逆に，$\langle x - x_0, x_k^* \rangle \leq r$ $(k \in \mathbb{N})$ とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $||x_k - (x - x_0)|| < \varepsilon$ となる k がとれて

$$\begin{aligned} ||x - x_0|| &\leq ||x_k|| + \varepsilon = \langle x_k, x_k^* \rangle + \varepsilon \\ &= \langle x_k - (x - x_0), x_k^* \rangle + \langle x - x_0, x_k^* \rangle + \varepsilon \\ &\leq r + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ が任意だから $||x - x_0|| \leq r$, i.e. $x \in \overline{B}_r(x_0)$. よって (6.21) が示せた．したがって $\overline{B}_r(x_0) \in \mathcal{B}_X[X^*]$ がいえる．正の有理数全体を $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ とすると，X の任意の開集合 U について

$$U = \bigcup \{ \overline{B}_{r_j}(x_k) : \overline{B}_{r_j}(x_k) \subset U \}$$

となるので $U \in \mathcal{B}_X[X^*]$. ゆえに $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{B}_X[X^*]$. ■

X 上の確率測度の議論に入る前に，一般の測度空間上のバナッハ空間値関数に対する可測性と可積分性について簡単に触れておこう．

定義 6.4.3 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を σ-有限な測度空間とする．関数 $f : \Omega \to X$ について次のように定義する．

(1) $\mu(N) = 0$ となる $N \in \mathcal{F}$ が存在して，すべての $x^* \in X^*$ に対して $\langle f(\cdot), x^* \rangle$ が $\Omega \setminus N$ 上で可測のとき，f は**弱可測**という．

(2) f が有限個の値 $x_1, \ldots, x_m$ をとり，$S_k = f^{-1}(\{x_k\}) \in \mathcal{F}$ $(k = 1, \ldots, m)$ のとき，f を**単関数**という．このとき，$f = \sum_{k=1}^{m} x_k 1_{S_k}$ (ただし 1_{S_k} は S_k の定義関数) と書ける．

(3) 単関数の列 $\{f_n\}$ が存在して $||f_n(\omega) - f(\omega)|| \to 0$ a.e. のとき，f は**強可測**という．このとき，$||f(\omega)|| = \lim_n ||f_n(\omega)||$ a.e. だから，$||f(\cdot)||$ は可測 (正確には，μ-測度 0 の集合上を除いて) である．

(4) f が強可測で $\int_{\Omega} ||f(\omega)|| d\mu(\omega) < +\infty$ のとき，f を**ボホナー可積分**または単に**可積分**という．

命題 6.4.4 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を上と同じとし，$f : \Omega \to X$ とする．

(1) f が強可測ならば f は弱可測．

(2) X が可分のとき，f が弱可測ならば f は強可測．

証明　(1) は明らか.

(2) μ と同値な有限測度で考えればよいから，μ が有限として十分である．f が弱可測のとき，すべての $x^* \in X^*$ に対して $\langle f(\cdot), x^* \rangle$ が Ω 全体で可測と仮定してよい．このとき，命題 6.4.2 より，f はボレル可測，すなわち $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_X)$-可測である．$X$ で稠密な $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ をとり，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$Q_{n,k} = f^{-1}(\overline{B}_{1/n}(x_k)) = \{\omega \in \Omega : ||f(\omega) - x_k|| \leq 1/n\} \tag{6.22}$$

とおくと $Q_{n,k} \in \mathcal{F}$ $(k \in \mathbb{N})$．$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{n,k}$ で μ が有限としたから，$\mu(\Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{m_n} Q_{n,k}) < 2^{-n}$ となる $m_n \in \mathbb{N}$ が存在する．$S_{n,1} = Q_{n,1}$, $S_{n,k} = Q_{n,k} \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} Q_{n,j}$ $(2 \leq k \leq m_n)$ として，$f_n = \sum_{k=1}^{m_n} x_k 1_{S_{n,k}}$ とおくと，$\omega \in \bigcup_{k=1}^{m_n} S_{n,k}$ $(= \Omega_n$ とおく$)$ ならば $||f_n(\omega) - f(\omega)|| \leq 1/n$. $\mu(\Omega \setminus \Omega_n) < 2^{-n}$ より $\mu(\Omega \setminus (\liminf_n \Omega_n)) = 0$ であり，すべての $\omega \in \liminf_n \Omega_n$ に対して $||f_n(\omega) - f(\omega)|| \to 0$. ゆえに f は強可測．■

単関数 $f = \sum_{k=1}^{m} x_k 1_{S_k}$ が可積分 (i.e. $x_k \neq 0$ なら $\mu(S_k) < \infty$) のとき，f の積分は $\int_\Omega f d\mu = \sum_{k=1}^{m} \mu(S_k) x_k$ と定義される．このとき

$$\Big|\Big| \int_\Omega f d\mu \Big|\Big| \leq \int_\Omega ||f(\omega)|| d\mu(\omega). \tag{6.23}$$

ボホナー可積分関数の積分を定義するために，次の補題を準備する．

補題 6.4.5　$f : \Omega \to X$ がボホナー可積分ならば，単関数の列 $\{f_n\}$ で $||f_n(\omega) - f(\omega)|| \to 0$ a.e. かつ $\sup_n ||f(\cdot)||$ が可積分となるものが存在する．

証明　単関数列 $\{g_n\}$ で $||g_n(\omega) - g(\omega)|| \to 0$ a.e. とする．各 g_n の値の全体で張られる X の可分な閉部分空間を X_0 とすると，$f(\omega) \in X_0$ a.e. であるから，最初から X が可分としてよい．すべての $\omega \in \Omega$ で $\xi(\omega) > 0$ となる Ω 上の可積分関数 ξ をとる．後は，(6.22) の定義を

$$Q_{n,k} = \{\omega \in \Omega : ||f(\omega) - x_k|| \leq \xi(\omega)\}$$

で置き換えれば，命題 6.4.4 (2) の証明のままでよい．このとき，$||f_n(\omega)|| \leq ||f(\omega)|| + \xi(\omega)$ だから，$\sup_n ||f_n(\cdot)||$ は可積分となる．■

命題 6.4.6　$f : \Omega \to X$ がボホナー可積分とし，前補題のように単関数列 $\{f_n\}$ をとる．このとき，ノルム極限 $x_0 = \lim_n \int_\Omega f_n d\mu$ が存在する．この

x_0 は

$$\langle x_0, x^* \rangle = \int_\Omega \langle f(\omega), x^* \rangle d\mu(\omega), \qquad x^* \in X^* \tag{6.24}$$

を満たす $x_0 \in X$ として一意に定まる．したがって x_0 は $\{f_n\}$ のとり方に無関係に定まる．

証明 $\eta(\omega) = \sup_n \|f_n(\omega)\|$ とおくと，η は可積分である．単関数 f_m, f_n について，$f_m - f_n$ も単関数であり

$$\int_\Omega (f_m - f_n) d\mu = \int_\Omega f_m d\mu - \int_\Omega f_n d\mu$$

が容易に確かめられる．よって (6.23) を使って

$$\left\| \int_\Omega f_m d\mu - \int_\Omega f_n d\mu \right\| \leq \int_\Omega \|f_m(\omega) - f_n(\omega)\| d\mu.$$

ところで，$\|f_m(\omega) - f_n(\omega)\| \leq 2\eta(\omega)$ かつ $\|f_m(\omega) - f_n(\omega)\| \to 0$ a.e. $(m, n \to \infty)$ だから，ルベーグの収束定理より $\int_\Omega \|f_m(\omega) - f_n(\omega)\| d\mu \to 0$ $(m, n \to \infty)$. これより $\{\int_\Omega f_n d\mu\}$ がコーシー列となり，$x_0 = \lim \int_\Omega f_n d\mu$ が存在する．任意の $x^* \in X^*$ に対して，$|\langle f_n(\omega), x^* \rangle| \leq \|x^*\| \eta(\omega)$ かつ $\langle f_n(\omega), x^* \rangle \to \langle f(\omega), x^* \rangle$ a.e. だから

$$\begin{aligned} \int_\Omega \langle f(\omega), x^* \rangle &= \lim_{n \to \infty} \int_\Omega \langle f_n(\omega), x^* \rangle d\mu(\omega) \\ &= \lim_{n \to \infty} \left\langle \int_\Omega f_n d\mu, x^* \right\rangle = \langle x_0, x^* \rangle \end{aligned}$$

となり，(6.24) が成立する．また，明らかに $x_0 \in X$ は (6.24) により一意に定まる． ■

上の命題で与えた x_0 を f の**積分**と呼び，$\int_\Omega f d\mu$ で表す．このとき (6.23) が同じく成立する．ついでに，f が**ペティス可積分**と呼ばれるのは，f が弱可測で (6.24) を満たす $x_0 \in X$ が存在するときをいう．

定義 6.4.7 写像 $R: X^* \to X$ が任意の $x^*, y^* \in X^*$ に対して

$$\langle Rx^*, y^* \rangle = \langle Ry^*, x^* \rangle$$

を満たすとき，R を**対称作用素**という．対称作用素 R が**正**であるとは，任意の $x^* \in X^*$ に対して $\langle Rx^*, x^* \rangle \geq 0$ であるときをいう．

命題 6.4.8　対称作用素 $R : X^* \to X$ は線型かつ有界 (i.e. $R \in \mathcal{B}(X^*, X)$) である．

証明　$x^*, y^*, z^* \in X^*$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\langle R(\alpha x^* + \beta y^*), z^* \rangle &= \langle Rz^*, \alpha x^* + \beta y^* \rangle = \alpha \langle Rz^*, x^* \rangle + \beta \langle Rz^*, y^* \rangle \\ &= \alpha \langle Rx^*, z^* \rangle + \beta \langle Ry^*, z^* \rangle = \langle \alpha Rx^* + \beta Ry^*, z^* \rangle.\end{aligned}$$

$z^* \in X^*$ が任意だから，$R(\alpha x^* + \beta y^*) = \alpha Rx^* + \beta Ry^*$. つまり R は線型．R が有界であることを示すには，定理 1.3.8 よりグラフ $G(R)$ が閉集合であることをいえばよい．$\{x_n^*\} \subset X^*$, $x^* \in X^*$, $x \in X$ について，$\|x_n^* - x^*\| \to 0$ かつ $\|Rx_n^* - x\| \to 0$ とする．任意の $y^* \in X^*$ に対して

$$\begin{aligned}\langle Rx^*, y^* \rangle &= \langle Ry^*, x^* \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Ry^*, x_n^* \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle Rx_n^*, y^* \rangle = \langle x, y^* \rangle\end{aligned}$$

となるから，$Rx^* = x$, i.e. $(x^*, x) \in G(R)$. ゆえに $G(R)$ は閉集合．　■

定理 6.4.9　実バナッハ空間 X が可分とし，$(X, \mathcal{B}_X)$ 上の確率測度 μ が $\int_X \|x\|^2 d\mu(x) < \infty$ を満たすとする．

(1) $m \in X$ が一意に存在して

$$\langle m, x^* \rangle = \int_X \langle x, x^* \rangle d\mu(x), \qquad x^* \in X^*.$$

(2) $R : X^* \to X$ が一意に存在して

$$\langle Rx^*, y^* \rangle = \int_X \langle x - m, x^* \rangle \langle x - m, y^* \rangle d\mu(x), \qquad x^*, y^* \in X^*.$$

この R は正の対称作用素である．

証明　(1) 恒等関数 $f(x) = x$ を確率空間 $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ 上の X-値関数と考える．f はボレル可測 (よって弱可測) であり

$$\int_X \|x\| d\mu(x) \le \left(\int_X \|x\|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \mu(X)^{1/2} < +\infty.$$

よって命題 6.4.4 (2) より，f はボホナー可積分である．したがって命題 6.4.6 より結論が得られる．

(2) $x^* \in X^*$ を任意に固定して，$f_{x^*}(x) = \langle x - m, x^* \rangle (x - m)$ と定める．明らかに f_{x^*} は $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ 上で弱可測であり，それゆえ強可測である．さらに

$$||f_{x^*}(x)|| \leq ||x - m||^2 ||x^*|| \leq (||x|| + ||m||)^2 ||x^*||$$

だから $\int_X ||f_{x^*}(x)|| d\mu(x) < +\infty$. よって命題 6.4.6 より，$Rx^* \in X$ が一意に存在して，任意の $y^* \in X^*$ に対して

$$\begin{aligned} \langle Rx^*, y^* \rangle &= \int_X \langle f_{x^*}(x), y^* \rangle d\mu(x) \\ &= \int_X \langle x - m, x^* \rangle \langle x - m, y^* \rangle d\mu(x). \end{aligned}$$

この最後の式は $x^*, y^* \in X^*$ について対称的だから，$\langle Rx^*, y^* \rangle = \langle Ry^*, x^* \rangle$. また，明らかに $\langle Rx^*, x^* \rangle \geq 0$. ゆえに $R : X^* \to X$ は正の対称作用素である．R の一意性も明らか． ■

定義 6.4.10 上の定理で与えた m を μ の**平均ベクトル**，R を μ の**共分散作用素**という．

正の対称作用素 $R : X^* \to X$ に対する分解定理を示すために，次の補題を用意する．

補題 6.4.11 $R : X^* \to X$ を正の対称作用素とするとき，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ と $Q \in \mathcal{B}(X^*, \mathcal{H})$ が存在して次が成立：

$$R = Q^* Q, \quad \overline{QX^*} = \mathcal{H}, \quad Q^* \mathcal{H} \subset X.$$

証明 $\mathcal{N} = \{x^* \in X^* : \langle Rx^*, x^* \rangle = 0\}$ とおく．X^* 上の双線型汎関数 $(x^*, y^*) \mapsto \langle Rx^*, y^* \rangle$ が正定値であるから，$\mathcal{N}$ は X^* の閉部分空間となる．商空間 $X^*/\mathcal{N}$ において内積を

$$\langle x^* + \mathcal{N}, y^* + \mathcal{N} \rangle = \langle Rx^*, y^* \rangle, \qquad x^*, y^* \in X^*$$

と定義することができる．内積空間 $X^*/\mathcal{N}$ の完備化ヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ とし，$Q : X^* \to \mathcal{H}$ を商写像 $Qx^* = x^* + \mathcal{N}$ とする．任意の $x^*, y^* \in X^*$ に対して $\langle Qx^*, Qy^* \rangle = \langle Rx^*, y^* \rangle$ だから，$Q \in \mathcal{B}(X^*, \mathcal{H})$ であり $Q^* Q = R$. また $\overline{QX^*} = \mathcal{H}$ は明らか．さらに，$Q^*(QX^*) = RX^* \subset X$ だから

$$Q^* \mathcal{H} = Q^*(\overline{QX^*}) \subset \overline{Q^*(QX^*)} \subset X. \quad ■$$

定義 6.4.12　ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が X の線型部分空間であり，埋め込み $j:\mathcal{H}\to X$ が連続，つまり $M>0$ が存在して $\|h\|_X \le M\|h\|_{\mathcal{H}}$ $(h\in\mathcal{H})$ のとき，$\mathcal{H}$ を X の**ヒルベルト部分空間**という．

定理 6.4.13　$R:X^*\to X$ を正の対称作用素とする．このとき，X のヒルベルト部分空間 $\mathcal{H}_R$ で，埋め込み $j_R:\mathcal{H}_R\to X$ が $R=j_Rj_R^*$ を満たすものが一意的に存在する．

証明　補題 6.4.11 より，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ と $Q\in\mathcal{B}(X^*,\mathcal{H})$ が存在して $R=Q^*Q$, $\overline{QX^*}=\mathcal{H}$, かつ $Q^*\mathcal{H}\subset X$ が成立する．いま，$v\in\mathcal{H}$, $Q^*v=0$ とすると，$\langle v,Qx^*\rangle_{\mathcal{H}}=\langle Q^*v,x^*\rangle=0$ $(x^*\in X^*)$. $\overline{QX^*}=\mathcal{H}$ より $v=0$. ゆえに Q^* は単射である．そこで $\mathcal{H}_R=Q^*\mathcal{H}$ $(\subset X)$ として，$\mathcal{H}_R$ の内積を

$$\langle Q^*v,Q^*w\rangle_{\mathcal{H}_R}=\langle v,w\rangle_{\mathcal{H}},\qquad v,w\in\mathcal{H}$$

と定義すると，$\mathcal{H}_R$ は $\mathcal{H}$ と同型なヒルベルト空間となる．実際，$Uv=Q^*v$ $(v\in\mathcal{H})$ により，ユニタリー作用素 $U:\mathcal{H}\to\mathcal{H}_R$ が定まる．このとき，$Q^*=j_RU$ だから

$$R=Q^*Q=j_RUU^*j_R^*=j_Rj_R^*.$$

次に一意性を示す．$\mathcal{K}$ を X のヒルベルト部分空間として，埋め込み $j:\mathcal{K}\to X$ が $R=jj^*$ を満たすとする．このとき，$j^*X^*\subset\mathcal{K}$ であり，X の線型部分空間として $j^*X^*=j(j^*X^*)=RX^*$. $v\in\mathcal{K}$ について，$v\in(j^*X^*)^\perp$ とすると，$\langle jv,x^*\rangle=\langle v,j^*x^*\rangle_{\mathcal{K}}=0$ $(x^*\in X^*)$. よって $jv=0$ となり $v=0$. これより $RX^*=j^*X^*$ は $\mathcal{K}$ で稠密．任意の $x^*,y^*\in X^*$ に対して

$$\langle Rx^*,Ry^*\rangle_{\mathcal{K}}=\langle j^*x^*,j^*y^*\rangle_{\mathcal{K}}=\langle jj^*x^*,y^*\rangle=\langle Rx^*,y^*\rangle.$$

ゆえに $\mathcal{K}$ は R だけで一意的に定まる．■

上の定理は，正の対称作用素 $R:X^*\to X$ が X のヒルベルト部分空間 $\mathcal{H}_R$ を経由して

$$X^*\xrightarrow{j_R^*}\mathcal{H}_R\xrightarrow{j_R}X$$

と分解できることを意味する．この $\mathcal{H}_R$ は R の再生核ヒルベルト空間と呼ばれる．実際，$K_R:X^*\times X^*\to\mathbb{R}$ を $K_R(x^*,y^*)=\langle Rx^*,y^*\rangle$ と定めると，

K_R は正定値核であり，$\mathcal{H}_R$ は K_R に対応する再生核ヒルベルト空間になっている (演習問題 6.15).

バナッハ空間上の確率測度に関して，次に定義する特性関数の概念が重要である．

定義 6.4.14　$(X, \mathcal{B}_X)$ 上の確率測度 μ に対して，関数 $\hat{\mu} : X^* \to \mathbb{C}$ を

$$\hat{\mu}(f) = \int_X e^{i\langle x,f\rangle} d\mu(x), \qquad f \in X^*$$

により定義する．この $\hat{\mu}$ を μ の**特性関数**という．

特に，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上のボレル確率測度 μ がルベーグ測度に関して絶対連続であり密度関数 h をもつとき

$$\hat{\mu}(y) = \hat{h}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) e^{i\langle x,y\rangle} dx, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

と書ける．つまり $\hat{h}$ は h のフーリエ変換である．

任意の $t > 0$ に対して，$(2\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2/2t)dx = 1$ だから

$$g_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{||x||^2}{2t}\right), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

は $\mathbb{R}^n$ 上の確率密度関数である．この $\{g_t : t > 0\}$ に関して次が成立する．証明は演習問題としておく．

補題 6.4.15　(1) $y \in \mathbb{R}^n$ に対して $\hat{g}_t(y) = \exp(-t||y||^2/2)$.

(2) $t \downarrow 0$ のとき g_t はディラック測度 δ_0 に弱収束する．つまり，$\mathbb{R}^n$ 上の任意の有界連続関数 φ に対して

$$\lim_{t\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) g_t(x) dx = \varphi(0).$$

補題 6.4.16　$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ 上の確率測度 μ_1, μ_2 について，$\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2$ ならば $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ 上で $\mu_1 = \mu_2$.

証明　任意の $t > 0$ に対して $h_t(x) = (2\pi t)^{-n/2} g_{1/t}(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ とおくと，補題 6.4.15 (1) より $\hat{h}_t = g_t$ である．μ が $\mathbb{R}^n$ 上の確率測度のとき，g_t と μ のたたみ込み $g_t * \mu$ を

$$(g_t * \mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_t(x-y) d\mu(y), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

で定義する．このとき，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，フビニの定理を使って

$$\begin{aligned}(g_t * \mu)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}_t(x-y)d\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} h_t(z)e^{i\langle z,x-y\rangle}dz\right)d\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h_t(z)e^{i\langle x,z\rangle}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y,z\rangle}d\mu(y)\right)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h_t(z)e^{i\langle x,z\rangle}\hat{\mu}(-z)dz. \qquad (6.25)\end{aligned}$$

さらに，φ が $\mathbb{R}^n$ 上の有界連続関数のとき

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)(g_t * \mu)(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)g_t(x-y)dx\right)d\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x+y)g_t(x)dx\right)d\mu(y).\end{aligned}$$

ところで

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x+y)g_t(x)dx\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|, \qquad y \in \mathbb{R}^n$$

であり，また補題 6.4.15 (2) より

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x+y)g_t(x)dx = \varphi(y), \qquad y \in \mathbb{R}^n.$$

ゆえに，ルベーグの有界収束定理より

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)(g_t * \mu)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)d\mu(y). \qquad (6.26)$$

いま $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2$ とすると，(6.25) より $g_t * \mu_1 = g_t * \mu_2$ $(t > 0)$. よって (6.26) より

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)d\mu_1(y) = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)d\mu_2(y)$$

が任意の $\mathbb{R}^n$ 上の有界連続関数 φ に対して成立する．これは $\mu_1 = \mu_2$ を意味する． ■

定理 6.4.17　X が可分とする．$(X, \mathcal{B}_X)$ 上の確率測度 μ_1, μ_2 について，すべての $f \in X^*$ に対して $\hat{\mu}_1(f) = \hat{\mu}_2(f)$ ならば，$\mathcal{B}_X$ 上で $\mu_1 = \mu_2$. つまり，$\mu \mapsto \hat{\mu}$ が $(X, \mathcal{B}_X)$ 上の確率測度全体の上で単射的である．

証明 命題 6.4.2 (と定義 6.4.1) より，$\mathcal{C}_X[X^*]$ が $\mathcal{B}_X$ を生成する集合体である．よって $S \in \mathcal{C}_X[X^*]$ に対して $\mu_1(S) = \mu_2(S)$ を示せば十分である．$\{f_1, \ldots, f_n\} \subset X^*$ と $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ がとれて

$$S = \{x \in X : (\langle x, f_1\rangle, \ldots, \langle x, f_n\rangle) \in D\}$$

と書ける．ボレル可測な $\phi_S : X \to \mathbb{R}^n$ を

$$\phi_S(x) = (\langle x, f_1\rangle, \ldots, \langle x, f_n\rangle)$$

と定め，$\nu_k = \mu_k \circ \phi_S^{-1}$ とおく．ν_k は $\mathbb{R}^n$ 上の確率測度であり，任意の $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}
\hat{\nu}_k(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle z, y\rangle) d(\mu_k \circ \phi_S^{-1})(z) \\
&= \int_X \exp(i\langle \phi_S(x), y\rangle) d\mu_k(x) \\
&= \int_X \exp(i\langle x, y_1 f_1 + \cdots + y_n f_n\rangle) d\mu_k(x) \\
&= \hat{\mu}_k(y_1 f_1 + \cdots + y_n f_n), \qquad k = 1, 2.
\end{aligned}$$

$\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2$ だから $\hat{\nu}_1 = \hat{\nu}_2$ となり，補題 6.4.16 より $\nu_1 = \nu_2$．したがって $\mu_1(S) = \nu_1(D) = \nu_2(D) = \mu_2(S)$． ■

この節の残りで，ガウス測度を定義し，その特性関数を求めてみよう．

定義 6.4.18 (1) $\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ がルベーグ測度に関して絶対連続であり，密度関数が $\alpha \in \mathbb{R}$ と $t > 0$ により

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x-\alpha)^2}{2t}\right\}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{6.27}$$

で与えられるとき，μ を平均 α, 分散 t の**ガウス測度**という．実際，$\alpha = \int_{\mathbb{R}} x d\mu(x)$, $t = \int_{\mathbb{R}} (x-\alpha)^2 d\mu(x)$ が成立している．さらに，$\alpha \in \mathbb{R}$ におけるディラック測度 δ_α もガウス測度の中に入れておく．これは上の密度関数で $t \downarrow 0$ としたときの極限になっている．

(2) $(X, \mathcal{B}_X)$ 上の確率測度 μ が**ガウス測度**であるとは，任意の $f \in X^*$ に対して $\mu_f = \mu \circ f^{-1}$ が $\mathbb{R}$ 上のガウス測度であるときをいう．

補題 6.4.19　$\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ について次は同値：

(i) μ がガウス測度；

(ii) $\alpha \in \mathbb{R}$ と $t \geq 0$ が存在して

$$\hat{\mu}(y) = \exp\Big(i\alpha y - \frac{1}{2}ty^2\Big), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

このとき，μ の平均が α で分散が t である (ただし $t = 0$ のときは $\mu = \delta_\alpha$).

証明　μ が平均 α, 分散 $t\ (>0)$ のガウス測度，すなわち (6.27) の密度関数 g をもつとする．補題 6.4.15 の g_t ($n = 1$ のとき) を用いて $g(x) = g_t(x - \alpha)$ と書けるから

$$\hat{\mu}(y) = \hat{g}(y) = e^{i\alpha y}\hat{g}_t(y) = \exp\Big(i\alpha y - \frac{1}{2}ty^2\Big), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

また，$\mu = \delta_\alpha$ のとき $\hat{\mu}(y) = e^{i\alpha y}$ は明らか．よって (i) $\Longrightarrow$ (ii) がいえた．(ii) $\Longrightarrow$ (i) は，補題 6.4.16 に注意すれば，容易にわかる．■

定理 6.4.20　X が可分とする．$(X, \mathcal{B}_X)$ 上の確率測度 μ について次は同値：

(i) μ がガウス測度；

(ii) $m \in X$ と正の対称作用素 $R : X^* \to X$ が存在して

$$\hat{\mu}(f) = \exp\Big(i\langle m, f\rangle - \frac{1}{2}\langle Rf, f\rangle\Big), \qquad f \in X^*.$$

このとき，μ の平均ベクトルが m で共分散作用素が R である．したがって，ガウス測度 μ は平均ベクトル m と共分散作用素 R で一意に定まる．

証明　(i) $\Longrightarrow$ (ii). μ を $(X, \mathcal{B}_X)$ 上のガウス測度とし，μ の平均ベクトルを m, 共分散作用素を R とする．任意の $f \in X^*$ に対して，$\mu_f = \mu \circ f^{-1}$ が $\mathbb{R}$ 上のガウス測度である．μ_f の平均 $m(f)$ と分散 $v(f)$ を求めると

$$m(f) = \int_{\mathbb{R}} y d\mu_f(y) = \int_X \langle x, f\rangle d\mu(x) = \langle m, f\rangle,$$

$$v(f) = \int_{\mathbb{R}} (y - m(f))^2 d\mu_f(y) = \int_X \langle x - m, f\rangle^2 d\mu(x) = \langle Rf, f\rangle.$$

よって補題 6.4.19 より

$$\hat{\mu}_f(y) = \exp\Big(i\langle m, f\rangle y - \frac{1}{2}\langle Rf, f\rangle y^2\Big), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

ところで

$$\hat{\mu}_f(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{izy} d\mu_f(z) = \int_X e^{i\langle x,f\rangle y} d\mu(x) = \hat{\mu}(yf)$$

であるから，(ii) の等式が得られる．

(ii) $\Longrightarrow$ (1). $f \in X^*$ を任意に固定すると

$$\hat{\mu}_f(y) = \hat{\mu}(yf) = \exp\Big(i\langle m, f\rangle y - \frac{1}{2}\langle Rf, f\rangle y^2\Big), \qquad y \in \mathbb{R}$$

となるから，補題 6.4.19 より μ_f は平均 $\langle m, f\rangle$, 分散 $\langle Rf, f\rangle$ の $\mathbb{R}$ 上のガウス測度となる．よって μ は $(X, \mathcal{B}_X)$ 上のガウス測度である．ここで μ の平均ベクトルを m_0, 共分散作用素を R_0 とすると，(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明から，μ_f の平均が $\langle m_0, f\rangle$, 分散が $\langle R_0 f, f\rangle$ である．よって任意の $f \in X^*$ に対して $\langle m, f\rangle = \langle m_0, f\rangle$, $\langle Rf, f\rangle = \langle R_0 f, f\rangle$. これより $m = m_0$, $R = R_0$ となり，最後の部分も示せた． ■

以下，$\mathcal{H}$ を可分な実ヒルベルト空間とする．$\int_{\mathcal{H}} \|x\|^2 d\mu(x) < +\infty$ を満たす $(\mathcal{H}, \mathcal{B}_{\mathcal{H}})$ 上の確率測度 μ に対して，定理 6.4.9 により平均ベクトル m と共分散作用素 $R : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ が定まる．この R は正対称なトレース・クラス作用素であることがわかる (演習問題 6.17)．このとき，再生核ヒルベルト空間は $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{H}_R = \overline{\mathrm{ran}}\, R^{1/2}$ で，埋め込み $j_R : \mathcal{H}_R \to \mathcal{H}$ は $j_R = R^{1/2}|\mathcal{H}_R$ で与えられ，$j_R^* = R^{1/2} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_R$ となる．特に，$\mu = [m, R]$ と書いて，μ が平均ベクトル m と共分散作用素 R をもつガウス測度であることを表す．以下に，$(\mathcal{H}, \mathcal{B}_{\mathcal{H}})$ 上のガウス測度に関してよく知られている性質のうち主なものを証明なしで述べる．

一般に，可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度 μ_1, μ_2 は，互いに絶対連続 (付録の A.2 節の最初を参照) のとき，同値といい $\mu_1 \sim \mu_2$ と表す．また，$\mu_1(\Omega \setminus S) = \mu_2(S) = 0$ となる $S \in \mathcal{F}$ が存在するとき，μ_1, μ_2 は特異といい $\mu_1 \perp \mu_2$ と表す．

定理 6.4.21 2 つのガウス測度 μ_1, μ_2 について，$\mu_1 \sim \mu_2$ または $\mu_1 \perp \mu_2$ のいずれかである．$\mu_1 = [m_1, R_1]$, $\mu_2 = [m_2, R_2]$ のとき，$\mu_1 \sim \mu_2$ であるための必要十分条件は次の (1), (2) が成立することである：

(1) $m_1 - m_2 \in \mathrm{ran}\, R_1^{1/2} = \mathrm{ran}\, R_2^{1/2}$,

(2) $R_1 = R_2^{1/2}(I + T)R_2^{1/2}$, $\ker R_2^{1/2} \subset \ker T$ を満たすヒルベルト-シュミット作用素 T が存在する．(この T は存在すれば一意.)

ヒルベルト空間上の確率測度の台について次が成立する．

定理 6.4.22　μ が平均ベクトル 0, 共分散作用素 R をもつ $(\mathcal{H}, \mathcal{B}_{\mathcal{H}})$ 上の確率測度とする．このとき，$\overline{\operatorname{ran} R}$ は測度 1 の最小の閉線型部分空間である．特に，μ がガウス測度のとき，$\overline{\operatorname{ran} R}$ は測度 1 の最小の閉部分集合である．

定理 6.4.23　ガウス測度 $\mu_1 = [m_1, R_1]$, $\mu_2 = [m_2, R_2]$ が $\mu_1 \sim \mu_2$ のとき，ラドン-ニコディム微分 $d\mu_1/d\mu_2$ (付録の補題 A.2.1 (1)) は次で与えられる：

$$
\begin{aligned}
&\log \frac{d\mu_1}{d\mu_2}(x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j,k}(\lambda_j\lambda_k)^{-1/2}\langle T(I+T)^{-1}e_j, e_k\rangle\langle x-m_1, e_j\rangle\langle x-m_1, e_k\rangle \\
&\quad + \sum_k \lambda_k^{-1}\langle x-m_2, e_k\rangle\langle m_1-m_2, e_k\rangle - \frac{1}{2}\sum_k \lambda_k^{-1}\langle m_1-m_2, e_k\rangle^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_k \log(1+t_k).
\end{aligned}
$$

ただし，$\{\lambda_k\}$ は R_2 の 0 でない固有値，$\{e_k\}$ は対応する R_2 の固有ベクトルからなる ONS，$\{t_k\}$ は定理 6.4.21 で与えた T の 0 でない固有値とする．

$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 μ_1, μ_2 に対して，**相対エントロピー** $S(\mu_1|\mu_2)$ は次のように定義される：

$$
S(\mu_1|\mu_2) = \begin{cases} \int_\Omega \log \frac{d\mu_1}{d\mu_2} d\mu_1, & \mu_1 \ll \mu_2 \text{ (絶対連続) のとき}, \\ +\infty, & \mu_1 \ll \mu_2 \text{ でないとき}. \end{cases}
$$

この相対エントロピーは，数理統計学や情報理論などの多くの分野で重要な役割をもっている．

定理 6.4.24　ガウス測度 μ_1, μ_2 が $\mu_1 \sim \mu_2$ のとき，相対エントロピー $S(\mu_1|\mu_2) = \int_{\mathcal{H}} \log(d\mu_1/d\mu_2)d\mu_1$ は

$$
S(\mu_1|\mu_2) = \frac{1}{2}\sum_k\{t_k - \log(1+t_k)\} + \frac{1}{2}\sum_k \lambda_k^{-1}\langle m_1-m_2, e_k\rangle^2
$$

で与えられる．

定理 6.4.25 (0-1 法則) μ をガウス測度とすると，任意の $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，$\mu(\operatorname{ran} T) = 0$ または $\mu(\operatorname{ran} T) = 1$ が成立する．さらに，$\mu = [m, R]$ のとき，$\mu(\operatorname{ran} T) = 1$ であるための必要十分条件は，$m \in \operatorname{ran} T$ かつ $R = TST^*$ を満たす正対称なトレース・クラス作用素 S が存在することである．このとき，$\ker T \subset \ker S$ となる S がとれる．

演習問題 6

1. $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ が C^* 環であることを証明せよ．

2. 次を示せ．
(1) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について，ある $n \in \mathbb{N}$ で $A^n \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ $[\mathcal{F}(\mathcal{H})]$ ならば，$A \in \mathcal{SF}(\mathcal{H})$ $[\mathcal{F}(\mathcal{H})]$ であり $\operatorname{ind} A^n = n(\operatorname{ind} A)$．
(2) $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ とし $\operatorname{ind} A$ が奇数のとき (例えば片側シフト作用素のとき)，$A = B^2$ となる $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は存在しない．

3. V を $\mathcal{H} = \ell^2$ 上の片側シフト作用素とするとき，$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 上の $V \oplus V^*$ について $\sigma(V \oplus V^*)$, $\sigma_e(V \oplus V^*)$, $\sigma_W(V \oplus V^*)$ を求めよ．

4. $\pi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$ を商写像とする．$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について次を示せ．
(1) $\pi(A)$ が自己共役, i.e. $\pi(A) = \pi(A)^*$ のとき，自己共役な $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ と $K \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ が存在して $A = B + iK$.
(2) $\pi(A)$ がユニタリー，i.e. $\pi(A)^*\pi(A) = \pi(A)\pi(A)^* = \pi(I)$ のとき，V が等距離作用素で $I - VV^*$ が有限階，または V^* が等距離作用素で $I - V^*V$ が有限階である $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ と $K \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ が存在して $A = V + K$. (ヒント：$|A| - I \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ を示せば，極分解 $A = W|A|$ をとると $A - W \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$.)

5. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とし，$\mathcal{M}$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間とする．次が同値であることを示せ：
(i) $\mathcal{M}$ が A を約する；
(ii) $A\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ かつ $A^*\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$;
(iii) $AP_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}A$. ただし $P_{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{M}$ 上への射影.
このとき，$\sigma(A) = \sigma(A|\mathcal{M}) \cup \sigma(A|\mathcal{M}^{\perp})$ も示せ．

6. 等距離作用素 $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ のウォルド分解を $V = (V|\mathcal{H}_0) \oplus (V|\mathcal{H}_0^\perp)$ とすると，$\mathcal{H}_0 = \bigcap_{n=1}^\infty V^n\mathcal{H}$ であることを示せ．

7. 命題 6.2.8 の下で述べた 1°–4° を示せ．

8. 定理 6.2.10 を使って次を証明せよ．縮小作用素 $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が $A_1A_2 = A_2A_1$ であるとき，任意の 2 変数多項式 $p(\zeta_1, \zeta_2)$ に対して

$$\|p(A_1, A_2)\| \le \max\{|p(\zeta_1, \zeta_2)| : \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C},\ |\zeta_1| \le 1,\ |\zeta_2| \le 1\}.$$

9. 補題 6.2.13 の証明で述べたように，コンパクト・ハウスドルフ空間 Ω の任意の開被覆 $\{O_1, \ldots, O_N\}$ に対して，それに従属する単位の分解 $\{h_1, \ldots, h_N\} \subset C(\Omega)$ が存在する．これを証明せよ．

10. 定理 6.2.14 の一意性に関する部分を証明せよ．

11. $\{w_n\} \subset \mathbb{C}$ を有界数列とする．ℓ^2 上の有界作用素 A を

$$Ax = (0, w_1\xi_1, w_2\xi_2, w_3\xi_3, \ldots), \qquad x = (\xi_n)_{n=1}^\infty$$

と定める．この A を**重みつき片側シフト作用素**という．

(1) $\|A\| = \sup_n |w_n|$ を示せ．

(2) A がハイポ正規であるための必要十分条件は $\{|w_n|\}$ が単調増加であることを示せ．

(3) A がハイポ正規のとき，$\sigma(A), \sigma_{\mathrm{p}}(A), \sigma_{\mathrm{p}}(A^*), \sigma_{\mathrm{e}}(A), \sigma_{\mathrm{W}}(A)$ を求めよ．

(4) A がクェーサイ正規であるための $\{w_n\}$ の条件を求めよ．

12. $\mathbf{H} = \bigoplus_{n=0}^\infty \mathcal{H}_n$ $(\mathcal{H}_n = \mathcal{H})$ とおいて，$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して $\mathbf{A} \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ を

$$\mathbf{A}(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (0, Ax_0, Ax_1, Ax_2, \ldots)$$

と定める．このとき次を示せ．

(1) A がハイポ正規 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{A}$ がハイポ正規．

(2) A がクェーサイ正規 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{A}$ がクェーサイ正規．

(3) A がサブ正規 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{A}$ がサブ正規．

(4) $\sigma(\mathbf{A}) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \le r(A)\}$.

13. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ がハイポ正規のとき，任意の $\lambda \notin \sigma(A)$ に対して

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(A))}$$

を示せ．

14. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が完全非正規なクェーサイ正規作用素のとき，$A^{*n} \xrightarrow{\mathrm{SOT}} 0$ を示せ．

15. X を実バナッハ空間とし，$R : X^* \to X$ を正の対称作用素とする．このとき，定理 6.4.13 で与えた $\mathcal{H}_R$ が再生核 $K(x^*, y^*) = \langle Rx^*, y^* \rangle$ $(x^*, y^* \in X^*)$ をもつ再生核ヒルベルト空間であることを証明せよ (演習問題 1.10 参照)．

16. 補題 6.4.15 を証明せよ．

17. $\mathcal{H}$ を可分な実ヒルベルト空間とし，μ が $\int_{\mathcal{H}} \|x\|^2 d\mu(x) < +\infty$ を満たす $(\mathcal{H}, \mathcal{B}_{\mathcal{H}})$ 上の確率測度とする．このとき，μ の共分散作用素 R が $\mathcal{H}$ 上の正の対称作用素であり

$$\mathrm{tr}\, R = \int_{\mathcal{H}} \|x - m\|^2 d\mu(x) \quad (m \text{ は } \mu \text{ の平均ベクトル})$$

が成立することを示せ．(ただし tr の定義は定義 4.2.2 と同じ.) よって R はトレース・クラス作用素となる．

18. μ_1, μ_2 は可測空間上の確率測度とする．定理 6.4.24 の上で定義した相対エントロピー $S(\mu_1|\mu_2)$ について次を示せ．

(1) $\mu_1, \mu_2 \ll \nu$ となる測度 ν をとると

$$S(\mu_1|\mu_2) = \int_{\Omega} \frac{d\mu_1}{d\nu}\left(\log \frac{d\mu_1}{d\nu} - \log \frac{d\mu_2}{d\nu}\right) d\nu.$$

(2) $S(\mu_1|\mu_2) \geq 0$, かつ $S(\mu_1|\mu_2) = 0 \Longleftrightarrow \mu_1 = \mu_2$.

(3) $S(\mu_1|\mu_2)$ は μ_1, μ_2 の両方についての凸関数．

19. 定理 6.4.23 の式を用いて，定理 6.4.24 の相対エントロピーの式を導け．

付　録

いくつかの基本定理

この付録では，関数解析学の基本定理のいくつかをとり挙げ，完全な証明をつけて解説する．第 6 章までに使われた定理はすべて含まれている．A.1 節で，ハーン-バナッハの拡張定理と分離定理を証明する．この拡張定理 (の系) は 1.2 節で使われた．分離定理を示すために，局所凸位相線型空間についても簡単に触れる．A.2 節で，連続関数環上の有界線型汎関数に対するリース-マルコフ-角谷の積分表示定理を証明する．この定理は，3.2 節のスペクトル分解定理の証明で本質的な役割を果たした．A.3 節で，クレイン-ミルマンの端点定理を証明する．この定理は，この本で直接には使っていないが，関数解析学でしばしば有用な働きをする．実際，A.4 節のビショップの定理の証明で効果的に用いられる．A.4 節で，この本で何度も使ったストーン-ワイエルシュトラスの定理を示す．そのために，もっと強いビショップの定理が証明される．A.5 節で，可換 C^*-環のゲルファンド-ナイマルクの定理を証明し，それを用いて正規作用素のスペクトル分解定理を示す．これにより，3.2 節で自己共役作用素とユニタリー作用素に限定したスペクトル分解が完成する．

A.1　ハーン-バナッハの定理

この節では，X は $\mathbb{K}$ $(=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C})$ 上の線型空間とする．

定義 A.1.1　(1) $p: X \to \mathbb{R}$ が次の (i), (ii) を満たすとき，p を X 上の**半線型汎関数**という：

(i) 任意の $x, y \in X$ に対して $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ (劣加法性),

(ii) 任意の $x \in X$ と $\alpha \geq 0$ に対して $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ (正斉次性).

(2) $p: X \to \mathbb{R}$ が上の (i) と次の (ii′) を満たすとき，p を X の**半ノルム**という：

(ii′) 任意の $x \in X$ と $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

半線型汎関数 p は $p(0) = 0$ を満たす．半ノルムは明らかに半線型汎関数である．また次が成立．

命題 A.1.2 p を X の半ノルムとし，$x, y \in X$ とする．

(1) $p(x) \geq 0$.

(2) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$.

証明 $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$ より $p(x) - p(y) \leq p(x - y)$.
また

$$p(y) - p(x) \leq p(y - x) = p(-(x - y)) = p(x - y).$$

よって (2) が成立．(1) は (2) で $y = 0$ とすればよい． ■

上の命題より，半ノルム p がさらに，$p(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ を満たすとき，p はノルム (定義 1.1.1) になる．

次の補題が，ハーン-バナッハの拡張定理の証明の実質的な部分である．

補題 A.1.3 X を $\mathbb{R}$ 上の線型空間，p を X 上の半線型汎関数，Y を X の線型部分空間とする．f が $f(y) \leq p(y)$ $(y \in Y)$ を満たす Y 上の線型汎関数とする．任意の $x_0 \in X \setminus Y$ に対して，$Y \cup \{x_0\}$ で張られる X の線型部分空間を Z とするとき，Z 上の線型汎関数 g で

$$g(y) = f(y), \qquad y \in Y,$$

$$g(x) \leq p(x), \qquad x \in Z$$

を満たすものが存在する．

証明 各 $x \in Z$ は $x = y + \alpha x_0$ $(y \in Y, \alpha \in \mathbb{R})$ と一意的に表される．そこで，$\lambda \in \mathbb{R}$ を固定して

$$g(y + \alpha x_0) = f(y) + \alpha\lambda, \qquad y \in Y,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

と定める．このとき，g が Z 上の線型汎関数であることは容易に確かめられる．また $g|Y = f$ は明らか．したがって，$g(x) \leq p(x)$ $(x \in Z)$ が成立するように，$\lambda \in \mathbb{R}$ が選べることを示せばよい．$y, y' \in Y$ とすると

$$\begin{aligned} f(y) - f(y') &= f(y - y') \leq p(y - y') \\ &= p(y + x_0 - y' - x_0) \\ &\leq p(y + x_0) + p(-y' - x_0) \end{aligned}$$

だから

$$-p(-y' - x_0) - f(y') \leq p(y + x_0) - f(y).$$

ここで $y, y' \in Y$ は独立に任意にとれる．したがって

$$\sup_{y \in Y}\{-p(-y - x_0) - f(y)\} \leq \inf_{y \in Y}\{p(y + x_0) - f(y)\}.$$

この上限と下限の間に $\lambda \in \mathbb{R}$ がとれて，すべての $y \in Y$ に対して

$$-p(-y - x_0) - f(y) \leq \lambda \leq p(y + x_0) - f(y).$$

そこで $x = y + \alpha x_0$ に対して，$g(x) \leq p(x)$ を $\alpha = 0, \alpha > 0, \alpha < 0$ の 3 つの場合にわけて示す．$\alpha = 0$ のときは $x = y \in Y$ より明らか．$\alpha > 0$ のとき

$$\lambda \leq p\left(\frac{1}{\alpha}y + x_0\right) - f\left(\frac{1}{\alpha}y\right)$$

より

$$g(x) = \alpha\left\{f\left(\frac{1}{\alpha}y\right) + \lambda\right\} \leq \alpha p\left(\frac{1}{\alpha}y + x_0\right) = p(x).$$

$\alpha < 0$ のとき

$$-p\left(-\frac{1}{\alpha}y - x_0\right) - f\left(\frac{1}{\alpha}y\right) \leq \lambda$$

より

$$g(x) = -\alpha\left\{-f\left(\frac{1}{\alpha}y\right) - \lambda\right\} \leq -\alpha p\left(-\frac{1}{\alpha}y - x_0\right) = p(x).$$

以上で結論が得られた．■

定理 A.1.4 (ハーン-バナッハの拡張定理)　X を $\mathbb{R}$ 上の線型空間，p を X 上の半線型汎関数，Y を X の線型部分空間とする．f が $f(y) \leq p(y)$ $(y \in Y)$ を満たす Y 上の線型汎関数とするとき，X 上の線型汎関数 g で

$$g(y) = f(y), \qquad y \in Y,$$

$$g(x) \leq p(x), \qquad x \in X$$

を満たすものが存在する.

証明 $Y \subset Z$ である X の線型部分空間 Z と

$$h(y) = f(y) \ \ (y \in Y), \quad h(x) \leq p(x) \ \ (x \in Z)$$

を満たす Z 上の線型汎関数 h の組 (Z,h) を考える．このような (Z,h) の全体を $\mathbb{F}$ とする．$(Y,f) \in \mathbb{F}$ より $\mathbb{F} \neq \emptyset$. $(Z_1,h_1),(Z_2,h_2) \in \mathbb{F}$ に対して

$$(Z_1,h_1) \leq (Z_2,h_2) \Longleftrightarrow Z_1 \subset Z_2 \text{ かつ } h_1 = h_2|Z_1$$

と定義すると，$\leq$ が $\mathbb{F}$ における順序関係であることは明らか．いま $\{(Z_\alpha,h_\alpha)\}$ を $\mathbb{F}$ の全順序部分集合とする．$Z = \bigcup_\alpha Z_\alpha$ とおき，$h(x) = h_\alpha(x)$ $(x \in Z_\alpha)$ により $h : Z \to \mathbb{R}$ が定義できる．このとき，$(Z,h) \in \mathbb{F}$ が容易にわかり，それゆえ (Z,h) は $\{(Z_\alpha,h_\alpha)\}$ の上界となる．これで $(\mathbb{F},\leq)$ が帰納的な順序集合であることが示せた．したがって，ツォルンの補題より $\mathbb{F}$ は極大元 (X_0,g_0) をもつ．そこで $X_0 = X$ を示せば十分である．$X_0 \neq X$ として $x_0 \in X \setminus X_0$ をとり，$X_0 \cup \{x_0\}$ で張られる X の線型部分空間を X_1 とする．補題 A.1.3 より，$(X_0,g_0) \leq (X_1,g_1) \in \mathbb{F}$ となる X_1 上の線型汎関数 g_1 が存在する．$X_0 \subsetneq X_1$ だから，これは (X_0,g_0) の極大性に反する．ゆえに $X_0 = X$ となり，g_0 が求めるものである． ■

定理 A.1.5 (ハーン-バナッハの拡張定理) X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間，p を X の半ノルム，Y を X の線型部分空間とする．f が $|f(y)| \leq p(y)$ $(y \in Y)$ を満たす Y 上の線型汎関数とするとき，X 上の線型汎関数 g で

$$g(y) = f(y), \qquad y \in Y,$$

$$|g(x)| \leq p(x), \qquad x \in X$$

を満たすものが存在する．

証明 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき，定理 A.1.4 と命題 A.1.2 (1) より明らか．$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする．X のスカラー倍を実数に制限すると，X は $\mathbb{R}$ 上の線型空間，Y は X の実線型部分空間とみることができる．$f_1(y) = \mathrm{Re}\, f(y)$ $(y \in Y)$ と定めると，f_1 は Y 上の実線型汎関数で

$$f_1(y) \leq |f(y)| \leq p(y), \qquad y \in Y.$$

よって定理 A.1.4 より，$g_1|Y = f_1$, $g_1(x) \le p(x)$ $(x \in X)$ を満たす X 上の実線型汎関数 g_1 が存在する．ここで

$$g(x) = g_1(x) - ig_1(ix), \qquad x \in X$$

と定義する．任意の $x \in X$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$g(\alpha x) = g_1(\alpha x) - ig_1(\alpha ix) = \alpha g_1(x) - i\alpha g_1(ix) = \alpha g(x).$$

また

$$g(ix) = g_1(ix) - ig_1(-x) = ig_1(x) + g_1(ix) = ig(x).$$

よって g が X 上の複素線型汎関数であることがわかる．$\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ により $|g(x)| = \lambda g(x)$ と書くと

$$|g(x)| = g(\lambda x) = g_1(\lambda x) \le p(\lambda x) = p(x).$$

さらに，任意の $y \in Y$ に対して

$$\operatorname{Im} f(y) = -\operatorname{Re}(if(y)) = -\operatorname{Re} f(iy) = -f_1(iy)$$

だから

$$f(y) = f_1(y) - if_1(iy) = g_1(y) - ig_1(iy) = g(y).$$

したがって g が求めるものである． ■

ノルム空間では次が成立．

定理 A.1.6　$(X, ||\cdot||)$ をノルム空間とし，Y を X の線型部分空間とする．任意の $f \in Y^*$ (定義 1.2.4) に対して，$g|Y = f$ かつ $||g|| = ||f||$ となる $g \in X^*$ が存在する．

証明　$p(x) = ||f||\,||x||$ $(x \in X)$ は半ノルムであり，$|f(y)| \le p(y)$ $(y \in Y)$ が成立．よって定理 A.1.5 より，$g|Y = f$ かつ $|g(x)| \le p(x) = ||f||\,||x||$ $(x \in X)$ を満たす $g \in X^*$ が存在する．$||g|| \le ||f||$ であり，また $g|Y = f$ より $||g|| \ge ||f||$. ゆえに $||g|| = ||f||$. ■

系 A.1.7　X をノルム空間，Y を X の線型部分空間とする．$x_0 \in X$ で $d = d(x_0, Y)$ $(= \inf_{y \in Y} ||x_0 - y||) > 0$ とするとき，$f(y) = 0$ $(y \in Y)$, $f(x_0) = d$, $||f|| = 1$ となる $f \in X^*$ が存在する．

証明　$Y \cup \{x_0\}$ で張られる X の線型部分空間を Z とし，Z 上の線型汎関数 f を $f(y+\alpha x_0)=\alpha d$ ($y \in Y$, $\alpha \in \mathbb{K}$) と定める．明らかに $f(y)=0$ ($y \in Y$), $f(x_0)=d$. さらに，$\alpha \neq 0$ のとき

$$|f(y+\alpha x_0)| = |\alpha| d \le |\alpha| \left|\left| x_0 + \frac{1}{\alpha} y \right|\right| = ||y+\alpha x_0||$$

だから $|f(y+\alpha x_0)| \le ||y+\alpha x_0||$. これは $\alpha = 0$ でも成立．よって $f \in Y^*$ で $||f|| \le 1$. また，任意の $y \in Y$ に対して $d = f(x_0 - y) \le ||f||\,||x_0 - y||$ だから，$d \le ||f|| d$ となり $||f|| \ge 1$. ゆえに $||f|| = 1$. したがって，定理 A.1.6 により f を X 全体に拡張したものを改めて f とすればよい．　■

特に，上の系で $Y = \{0\}$ とすると，任意の $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$ に対して，$f(x_0) = ||x_0||$ かつ $||f|| = 1$ となる $f \in X^*$ が存在することがわかる．これは双対空間 X^* が十分多くの元を含むことを保証する．

以下で，ハーン-バナッハの分離定理を示す．そのために次の一般的な定義を与える．

定義 A.1.8　(1) 線型空間 X 上の位相 $\mathcal{T}$ について，和 $(x,y) \in X \times X \mapsto x+y \in X$ とスカラー倍 $(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times X \mapsto \alpha x \in X$ が 2 変数の写像として (i.e. $X \times X$, $\mathbb{K} \times X$ の直積位相で) 連続となるとき，$\mathcal{T}$ を X 上の**線型位相**という．このとき，$(X, \mathcal{T})$ は**位相線型空間**と呼ばれる．以下，線型位相 $\mathcal{T}$ は常にハウスドルフ位相とする．これは，$0 \in X$ の近傍系 $\mathcal{U}_0$ について $\bigcap \{U : U \in \mathcal{U}_0\} = \{0\}$ であることと同値．

(2) X 上の線型位相 $\mathcal{T}$ が**局所凸**であるとは，$0 \in X$ が凸集合からなる基本近傍系をもつときをいう．このとき，$(X, \mathcal{T})$ は**局所凸位相線型空間**と呼ばれる．

例えば，X がバナッハ空間のとき，$(X, \text{弱位相})$ および $(X^*, \text{弱}*\text{位相})$ は局所凸位相線型空間である．このとき，$(X, \text{弱位相})$, $(X^*, \text{弱}*\text{位相})$ 上の連続な線型汎関数の全体はそれぞれ X^*, X ($\subset X^{**}$) と一致することに注意する．また，$\mathcal{H}$ がヒルベルト空間のとき，$(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathrm{SOT})$ や $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathrm{WOT})$ なども局所凸位相線型空間である (演習問題 2.8)．

補題 A.1.9　X を位相線型空間，V を $0 \in X$ の凸近傍とする．

$$p(x) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{1}{\alpha} x \in V \right\}, \qquad x \in X$$

と定めると，p は半線型汎関数であり

$$\{x \in X : p(x) < 1\} \subset V \subset \{x \in X : p(x) \leq 1\}. \tag{A.1}$$

証明　まず，V が 0 の近傍だから，任意の $x \in X$ に対して $\alpha^{-1}x \in V$ となる $\alpha > 0$ がとれることに注意する．$p(\alpha x) = \alpha p(x)$ $(\alpha \geq 0)$ は定義より明らか．任意の $x, y \in X$ に対して，$\alpha, \beta > 0$ で $\alpha^{-1}x, \beta^{-1}y \in V$ とすると

$$\frac{1}{\alpha+\beta}(x+y) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\Big(\frac{1}{\alpha}x\Big) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\Big(\frac{1}{\beta}y\Big) \in V$$

だから $p(x+y) \leq \alpha + \beta$．よって $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$．ゆえに p は半線型汎関数．(A.1) は簡単に示せる．■

上で与えた p は V に対する**ミンコフスキー汎関数**と呼ばれる．

定理 A.1.10 (ハーン-バナッハの分離定理)　X を局所凸位相線型空間とし，B, C を X の空でない凸部分集合とする．

(1) $0 \in X$ が $B - C = \{x - y : x \in B,\ y \in C\}$ の閉包に属さないならば，X 上の連続な線型汎関数 f が存在して

$$\sup\{\mathrm{Re}\, f(x) : x \in B\} < \inf\{\mathrm{Re}\, f(y) : y \in C\}. \tag{A.2}$$

(2) B が閉集合，C がコンパクト，$B \cap C = \emptyset$ ならば，X 上の連続な線型汎関数 f が存在して (A.2) を満たす．

証明　(1) 定理 A.1.5 の証明からわかるように，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合で証明すれば十分である．仮定より 0 の凸近傍 U が存在して $0 \notin B - C + U$．$x_0 \in -(B-C)$ をとり

$$V = \{\lambda x : x \in B - C + U,\ \lambda \geq 1\} + x_0$$

とおくと，V は 0 の近傍であり，$B - C + U$ の凸性より V が凸集合であることは容易に確かめられる．p を V に対するミンコフスキー汎関数とすると，$x_0 \notin V$ だから (A.1) より $p(x_0) \geq 1$．$Y = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{R}\}$ 上の線型汎関数 f_0 を $f_0(\alpha x_0) = \alpha p(x_0)$ と定める．$f_0(y) \leq p(y)$ $(y \in Y)$ となるから，定理 A.1.4 より X 上の線型汎関数 f が存在して $f(x) \leq p(x)$ $(x \in X)$ かつ $f(x_0) = f_0(x_0) \geq 1$．任意の $x \in B$, $y \in C$, $z \in U$ と $\lambda \geq 1$ に対して，

$\lambda(x-y+z)+x_0 \in V$ だから (A.1) より

$$\begin{aligned} f(x-y+z) &= \frac{1}{\lambda}\{f(\lambda(x-y+z)+x_0)-f(x_0)\} \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\{p(\lambda(x-y+z)+x_0)-f(x_0)\} \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\{1-f(x_0)\}. \end{aligned}$$

$\lambda \to \infty$ として $f(x-y+z) \leq 0$. したがって

$$\sup_{x\in B} f(x) + \sup_{z\in U} f(z) \leq \inf_{y\in C} f(y).$$

$\delta x_0 \in U$ となる $\delta > 0$ がとれるから，$\sup_{z\in U} f(z) > 0$ であり，それゆえ (A.2) が得られる.

(2) $B-C$ が閉であることを示せばよい. $x \notin B-C$ のとき，各 $y \in C$ に対して，$x+y \notin B$ だから 0 の凸近傍 V_y がとれて $(x+y+2V_y)\cap B = \emptyset$. C のコンパクト性より，有限個の $y_1,\ldots,y_n \in C$ がとれて $C \subset \bigcup_{i=1}^n (y_i+V_{y_i})$. このとき，0 の近傍 $V=\bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$ について，$x+C+V \subset \bigcup_{i=1}^n (x+y_i+2V_{y_i})$ だから $(x+C+V)\cap B=\emptyset$, i.e. $(x+V)\cap(B-C)=\emptyset$. よって $x \notin \overline{B-C}$. ■

例えば，バナッハ空間 X の凸部分集合 B がノルム閉のとき，任意の $x_0 \notin B$ に対して，$C=\{x_0\}$ として定理 A.1.10 (2) が適用できる. よって $\{f_\gamma\} \subset X^*$ と $\{\xi_\gamma\} \subset \mathbb{R}$ がとれて

$$B = \bigcap_\gamma \{x \in X : \mathrm{Re}\, f_\gamma(x) \leq \xi_\gamma\}$$

と表される. これより，B は弱位相で閉であることがわかる.

A.2 リース-マルコフ-角谷の定理

この節では，正測度だけでなく複素数値測度も扱うので，一般の可測空間の場合で少し準備しておく. $(\Omega,\mathcal{F})$ を可測空間とし，$\mu:\mathcal{F}\to\mathbb{C}$ が $\mu(\emptyset)=0$, かつ $\{S_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ が互いに素ならば $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty S_n)=\sum_{n=1}^\infty \mu(S_n)$ を満たすとき，μ を $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の**複素数値測度**という. このとき，μ の実部 $\mu'=\mathrm{Re}\,\mu$ と虚部 $\mu''=\mathrm{Im}\,\mu$ は実数値測度 (符号つき測度ともいう) であり $\mu=\mu'+i\mu''$ と書ける. μ' について，$R\in\mathcal{F}$ が存在して $\mu'(S)\geq 0$ $(S\in\mathcal{F},\ S\subset R)$

かつ $\mu'(S) \le 0$ $(S \in \mathcal{F},\ S \subset R^c)$ となる．つまり，Ω が μ' の正の部分 R と負の部分 R^c に分割できる．これを μ' の**ハーン分解**という．そこで $\mu_1(S) = \mu'(S \cap R)$, $\mu_2(S) = -\mu'(S \cap R^c)$ と定めると，μ_1, μ_2 は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の有限な正測度で $\mu' = \mu_1 - \mu_2$ と書ける．μ_1, μ_2 はそれぞれ μ' の**正変動**，**負変動**と呼ばれ，$\mu' = \mu_1 - \mu_2$ を μ' の**ジョルダン分解**という．μ'' についても，同様にジョルダン分解ができるから，μ は4つの有限な正測度 $\mu_1, \ldots, \mu_4$ を用いて

$$\mu = (\mu_1 - \mu_2) + i(\mu_3 - \mu_4) \tag{A.3}$$

と表すことができる．

ν を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の有限 (または σ-有限) な正測度とする．ν に関して可積分な Ω 上の複素数値関数の全体 $L^1(\Omega, \nu)$ は，ノルム $\|f\|_1 = \int_\Omega |f| d\nu$ によりバナッハ空間になる（ただし $f = g$ ν-a.e. のとき $f = g$ とみなす)．$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の複素数値測度 μ について，μ が ν に関して**絶対連続**とは，任意の $S \in \mathcal{F}$ に対して $\nu(S) = 0 \Longrightarrow \mu(S) = 0$ のときをいう．このとき $\mu \ll \nu$ と表す．次の補題で述べるラドン-ニコディムの定理は測度論における基本定理の1つである．

補題 A.2.1 (ラドン-ニコディムの定理)　(1) ν, μ を上と同じとする．$\mu \ll \nu$ ならば，$h \in L^1(\Omega, \nu)$ が一意に存在して

$$\mu(S) = \int_S h d\nu, \qquad S \in \mathcal{F}. \tag{A.4}$$

この h を μ の ν に関する**ラドン-ニコディム微分**と呼び，$h = d\mu/d\nu$ と表す．

(2) 上で μ も正測度とすると，$h = d\mu/d\nu \ge 0$ ν-a.e. であり，任意の $f \in L^1(\Omega, \mu)$ に対して $fh \in L^1(\Omega, \nu)$ で

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f h d\nu.$$

(3) $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の有限な正測度 ν, μ と複素数値測度 λ について，$\mu \ll \nu$ かつ $\lambda \ll \mu$ ならば，$\lambda \ll \nu$ であり

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = \frac{d\lambda}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\nu} \quad \nu\text{-a.e.}$$

証明 (1) のみを証明し，(2) と (3) は問題としておく．簡単のため，ν は有限とする．また，μ は (A.3) のように分解できて $\mu_k \ll \nu$ $(k = 1, \ldots, 4)$ となるから，μ も正測度として十分である．$m = \mu + \nu$ として，ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = L^2(\Omega, m)$ で考える．各 $f \in \mathcal{H} = L^2(\Omega, m)$ に対して

$$\int_\Omega |f| d\mu \leq \int_\Omega |f| dm \leq \left(\int_\Omega 1 dm\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |f|^2 dm\right)^{1/2} = m(\Omega)^{1/2} \|f\|_2.$$

上の 2 番目の不等式はシュワルツの不等式 (命題 1.1.4) による．よって $\varphi(f) = \int_\Omega f d\mu$ $(f \in \mathcal{H})$ が定義できて，$|\varphi(f)| \leq m(\Omega)^{1/2} \|f\|_2$ だから，φ は $\mathcal{H}$ 上の有界線型汎関数となる．定理 1.2.16 より，$h_\varphi \in \mathcal{H}$ が存在して $\varphi(f) = \langle f, h_\varphi \rangle$ $(f \in \mathcal{H})$．同様に，$\psi(f) = \int_\Omega f d\nu$ についても，$h_\psi \in \mathcal{H}$ が存在して $\psi(f) = \langle f, h_\psi \rangle$ $(f \in \mathcal{H})$．このとき次が容易に示せる：$h_\varphi \geq 0$, $h_\psi \geq 0$, $h_\varphi + h_\psi = 1$ m-a.e. さらに，m と ν が同値 (i.e. 互いに絶対連続) だから，$h_\psi > 0$ m-a.e. もわかる．したがって $h(\omega) = h_\varphi(\omega)/h_\psi(\omega)$ が m-a.e. ω で定義できる．任意の $f \in \mathcal{H}$, $f \geq 0$ に対して

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f h_\varphi dm = \int_\Omega f h h_\psi dm = \int_\Omega f h d\nu$$

が成立する．これより $h \in L^1(\Omega, \nu)$ で (A.4) が得られる．h の一意性は明らかであろう． ■

補題 A.2.2 μ を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の複素数値測度とする．

(1) 各 $S \in \mathcal{F}$ に対して

$$|\mu|(S) = \sup\left\{ \sum_{k=1}^n |\mu(S_k)| : \{S_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{F} \text{ は互いに素, } \bigcup_{k=1}^n S_k = S \right\}$$

と定めると，$|\mu|$ は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の有限な正測度である．この $|\mu|$ を μ の**全変動**という．

(2) $\mu \ll \nu$ である $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の任意の有限正測度 ν に対して，$h = d\mu/d\nu$ とすると

$$|\mu|(S) = \int_S |h| d\nu, \qquad S \in \mathcal{F}.$$

(3) $\mu \ll |\mu|$ で $|d\mu/d|\mu|| = 1$ $|\mu|$-a.e.

証明　(1) は (2) を示してしまえば明らかである．

(2) まず，$\mu \ll \nu$ である有限正測度 ν は常に存在することに注意する．例えば，(A.3) の分解を用いて $\nu = \sum_{k=1}^{4} \mu_k$ とおけばよい．S を全空間とみなしてよいから，$S = \Omega$ として十分．$|\mu|$ の定義より

$$\begin{aligned}
&|\mu|(\Omega)\\
&\quad = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{S_k} h d\nu\right| : \{S_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathcal{F} \text{ は互いに素，} \bigcup_{k=1}^{n} S_k = \Omega\right\}\\
&\quad = \sup\left\{\left|\int_{\Omega} f h d\nu\right| : f \text{ は単関数，} |f| \le 1\right\}.
\end{aligned}$$

f が単関数で $|f| \le 1$ のとき

$$\left|\int_{\Omega} f h d\nu\right| \le \int_{\Omega} |fh| d\nu \le \int_{\Omega} |h| d\nu.$$

逆に，$|f_n| \le 1$ かつ $\{\omega : h(\omega) \neq 0\}$ 上で $f_n(\omega) \to |h(\omega)|/h(\omega)$ となる単関数列 $\{f_n\}$ がとれて，$|f_n h| \le |h|$ かつ $f_n h \to |h|$ だから，ルベーグの収束定理より

$$\int_{\Omega} |h| d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n h d\nu = \lim_{n\to\infty} \left|\int_{\Omega} f_n h d\nu\right|.$$

よって $|\mu|(\Omega) = \int_{\Omega} |h| d\nu$ が示せた．

(3) $\mu \ll |\mu|$ は明らか．$h = d\mu/d|\mu|$ とすると，(2) より $|\mu|(S) = \int_S |h| d|\mu|$ $(S \in \mathcal{F})$．これより $|h| = 1$ $|\mu|$-a.e. を得る．■

以下，Ω は局所コンパクト・ハウスドルフ空間とする．ここで，位相空間 Ω は，すべての $\omega \in \Omega$ がコンパクト近傍をもつとき，**局所コンパクト**と呼ばれる．

定義 A.2.3　(1) f を Ω 上の複素数値連続関数とする．f の**台** $\mathrm{supp}(f)$ を $\{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq 0\}$ の閉包として定義する．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| \ge \varepsilon\}$ がコンパクトのとき，f は**無限遠点で消える**といわれる．このような無限遠点で消える Ω 上の連続関数の全体を $C_0(\Omega)$ で表す．$C_0(\Omega)$ はノルム $\|f\| = \sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega)|$ によりバナッハ空間になる．さらに，$\mathrm{supp}(f)$ がコンパクトである Ω 上の連続関数の全体を $C_c(\Omega)$ で表すと，$C_c(\Omega)$ は $C_0(\Omega)$ の稠密な線型部分空間である．特に Ω がコンパクトのときは，明らかに $C_0(\Omega) = C(\Omega)$ (Ω 上の連続関数全体)．

(2) Ω の開集合全体 (または閉集合全体) で生成される σ-集合体を $\mathcal{B}_\Omega$ で表し，Ω の**ボレル σ-集合体**という．$\mathcal{B}_\Omega$ の元は**ボレル集合**と呼ばれる．

(3) $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ 上の正測度 μ が**正則**とは，任意の $S \in \mathcal{B}_\Omega$ に対して

$$\mu(S) = \sup\{\mu(K) : K \text{ はコンパクト, } K \subset S\}, \tag{A.5}$$

$$\mu(S) = \inf\{\mu(O) : O \text{ は開集合, } S \subset O\} \tag{A.6}$$

が成立するときをいう．μ が有限のときは，(A.5) $\Longrightarrow$ (A.6) は簡単にわかる．

(4) $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ 上の複素数値測度 μ で $|\mu|$ が正則なものを**ラドン測度**という．$(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ 上のラドン測度の全体を $M(\Omega)$ で表す．$\mu \in M(\Omega)$ に対して，$||\mu|| = |\mu|(\Omega)$ と定め μ の**全変動ノルム**という．以下の系 A.2.8 で $(M(\Omega), ||\cdot||)$ がバナッハ空間になることを示す．

(5) Ω 上の有界ボレル関数 f と $\mu \in M(\Omega)$ に対して，f の μ による積分 $\int_\Omega f d\mu$ を

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f \frac{d\mu}{d|\mu|} d|\mu| \tag{A.7}$$

と定義する．実際は，全変動 $|\mu|$ を使わずに，直接 μ で通常の積分と同様に定義することもできるが，上のように定義する方が簡便である．

以下の議論でくり返し使われる**ウリゾーンの補題**は次のように述べられる：Ω のコンパクト集合 K と開集合 O が $K \subset O$ を満たすとき，$0 \leq f \leq 1$ である $f \in C_c(\Omega)$ が存在して $f(\omega) = 1$ $(\omega \in K)$ かつ $\mathrm{supp}(f) \subset O$.

補題 A.2.4 μ を $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ 上の正則な有限正測度とするとき，任意の $1 \leq p < \infty$ に対して，$C_c(\Omega)$ は $L^p(\Omega, \mu)$ (演習問題 1.2) で稠密である．

証明 単関数の全体が $L^p(\Omega, \mu)$ で稠密であるから，定義関数 1_S $(S \in \mathcal{B}_\Omega)$ が $C_c(\Omega)$ の関数で $||\cdot||_p$-近似できることをいえばよい．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，μ の正則性より，$K \subset S \subset O$ であるコンパクト集合 K と開集合 O が存在して $\mu(O \setminus K) < \varepsilon$ とできる．上で述べたウリゾーンの補題より，$0 \leq f \leq 1$ である $f \in C_c(\Omega)$ がとれて $f(\omega) = 1$ $(\omega \in K)$ かつ $\mathrm{supp}(f) \subset O$. このとき，$f(\omega) = 1_S(\omega)$ $(\omega \in K \cup O^c)$ だから

$$||1_S - f||_p^p = \int_{O \setminus K} |f - 1|^p d\mu \leq \mu(O \setminus K) < \varepsilon.$$

よって結論が従う． ■

補題 A.2.5　(1) $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ 上の複素数値測度 μ について，$\mu \in M(\Omega)$ であるための必要十分条件は，μ が正則な有限正測度の 1 次結合となることである．よって $M(\Omega)$ は $\mathbb{C}$ 上の線型空間となる．

(2) $\mu \in M(\Omega)$ に対して $\varphi_\mu(f) = \int_\Omega f d\mu$ $(f \in C_0(\Omega))$ と定めると，$\varphi_\mu \in C_0(\Omega)^*$ で $||\varphi_\mu|| = ||\mu||$.

(3) f が Ω 上の有界ボレル関数のとき，任意の $\mu, \mu' \in M(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$\int_\Omega f d(\mu + \mu') = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega f d\mu',$$

$$\int_\Omega f d(\alpha\mu) = \alpha \int_\Omega f d\mu.$$

証明　(1) $\mu \in M(\Omega)$, すなわち $|\mu|$ が正則とする．補題 A.2.2 (3) より $h = d\mu/d|\mu|$ とおくと，有界なボレル関数 $h_1, \ldots, h_4 \geq 0$ がとれて $h = (h_1 - h_2) + i(h_3 - h_4)$ $|\mu|$-a.e. $\mu_k(S) = \int_S h_k d|\mu|$ $(S \in \mathcal{B}_\Omega)$ と定めると，$\mu = (\mu_1 - \mu_2) + i(\mu_3 - \mu_4)$. そこで μ_k が正則であることをいえばよい．任意の $S \in \mathcal{B}_\Omega$ に対して，$|\mu|$ の正則性より $K_n \subset S$ であるコンパクト集合の増大列 $\{K_n\}$ がとれて $|\mu|(K_n) \to |\mu|(S)$. このとき，$1_{K_n} \uparrow 1_S$ $|\mu|$-a.e. だから，単調収束定理より

$$\mu_k(K_n) = \int_\Omega 1_{K_n} h_k d|\mu| \to \int_\Omega 1_S h_k d|\mu| = \mu_k(S).$$

よって μ_k は (A.5) を満たす．逆に $\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_k$ (μ_k は正則な有限正測度) とする．$\nu = \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \mu_k$ とおくと，ν は正則な有限正測度であり，明らかに $|\mu|(S) \leq \nu(S)$ $(S \in \mathcal{B}_\Omega)$. したがって，$h = d|\mu|/d\nu$ とおいて上と同様にすれば，$|\mu|$ の正則性が示せる．

(2) 定義 (A.7) より φ_μ が $C_0(\Omega)$ 上の線型汎関数であることは明らか．また，$h = d\mu/d|\mu|$ とすると，補題 A.2.2 (3) より

$$|\varphi_\mu(f)| = \left| \int_\Omega f h d|\mu| \right| \leq \int_\Omega |f| d|\mu| \leq ||\mu||\, ||f||, \qquad f \in C_0(\Omega)$$

となるから，$\varphi_\mu \in C_0(\Omega)^*$ かつ $||\varphi_\mu|| \leq ||\mu||$. 逆に，補題 A.2.4 より，$\{f_n\} \subset C_c(\Omega)$ が存在して $\int_\Omega |f_n - \overline{h}| d|\mu| \to 0$ とできる．

$$g_n(\omega) = \begin{cases} f_n(\omega)/|f_n(\omega)|, & |f_n(\omega)| > 1 \text{ のとき} \\ f_n(\omega), & |f_n(\omega)| \leq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定めると，$g_n \in C_c(\Omega)$ かつ $||g_n|| \leq 1$ であり，$|h| = 1$ $|\mu|$-a.e. だから $|g_n - \overline{h}| \leq |f_n - \overline{h}|$ $|\mu|$-a.e. したがって

$$\begin{aligned} |\varphi_\mu(g_n) - ||\mu||\,| &= \left| \int_\Omega (g_n - \overline{h}) h d|\mu| \right| \\ &\leq \int_\Omega |g_n - \overline{h}| d|\mu| \\ &\leq \int_\Omega |f_n - \overline{h}| d|\mu| \to 0 \end{aligned}$$

となり，$||\mu|| = \lim_n |\varphi_\mu(g_n)| \leq ||\varphi_\mu||$.

(3) まず，$\mu \ll \nu$ である任意の有限正測度 ν に対して $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f \frac{d\mu}{d\nu} d\nu$ を示す．$\mu \ll \nu$ ならば $|\mu| \ll \nu$ だから，補題 A.2.1 (3) より

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \frac{d\mu}{d|\mu|} \cdot \frac{d|\mu|}{d\nu} \quad \nu\text{-a.e.}$$

よって補題 A.2.1 (2) より

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f \frac{d\mu}{d|\mu|} d|\mu| = \int_\Omega f \frac{d\mu}{d|\mu|} \frac{d|\mu|}{d\nu} d\nu = \int_\Omega f \frac{d\mu}{d\nu} d\nu.$$

そこで $\mu, \mu' \in M(\Omega)$ に対して $\mu, \mu' \ll \nu$ である有限正測度 ν をとると，$d(\mu + \mu')/d\nu = d\mu/d\nu + d\mu'/d\nu$ ν-a.e. だから

$$\begin{aligned} \int_\Omega f d(\mu + \mu') &= \int_\Omega f \frac{d(\mu + \mu')}{d\nu} d\nu \\ &= \int_\Omega f \frac{d\mu}{d\nu} d\nu + \int_\Omega f \frac{d\mu'}{d\nu} d\nu \\ &= \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega f d\mu'. \end{aligned}$$

さらに

$$\int_\Omega f d(\alpha\mu) = \int_\Omega f \frac{d(\alpha\mu)}{d|\mu|} d|\mu| = \int_\Omega f \left(\alpha \frac{d\mu}{d|\mu|} \right) d|\mu| = \alpha \int_\Omega f d\mu. \quad \blacksquare$$

$\Phi : M(\Omega) \to C_0(\Omega)^*$ を $\Phi(\mu) = \varphi_\mu$ と定義すると，補題 A.2.5 の (2), (3) は Φ が等距離線型写像であることを意味する．以下で証明するリース-マルコフ-角谷の表現定理は，この Φ により $M(\Omega)$ と $C_0(\Omega)^*$ が等距離同型であることを主張する．残る問題はこの写像の全射性を示すことにあるが，最初に $\varphi \in C_0(\Omega)^*$ が正値，すなわち $f \in C_0(\Omega)$, $f \geq 0 \Longrightarrow \varphi(f) \geq 0$ の場合を扱う．

定理 A.2.6 (リース-マルコフ-角谷の表現定理)　$\varphi \in C_0(\Omega)^*$ が正値ならば，正の $\mu \in M(\Omega)$ が一意に存在して $\varphi = \varphi_\mu$, すなわち

$$\varphi(f) = \int_\Omega f d\mu, \qquad f \in C_0(\Omega). \tag{A.8}$$

このとき，$\|\varphi\| = \|\mu\| = \mu(\Omega)$.

証明　上で述べたように，$\mu \in M(\Omega) \mapsto \varphi_\mu \in C_0(\Omega)^*$ が等距離線型写像であるから，μ の一意性と $\|\varphi\| = \|\mu\|$ は既に知られている．以下，μ の存在を証明する．

Ω の任意の開集合 O に対して

$$\hat{\mu}(O) = \sup\{\varphi(f) : f \in C_c(\Omega),\ 0 \le f \le 1,\ \mathrm{supp}(f) \subset O\} \tag{A.9}$$

と定める．このとき，明らかに $\hat{\mu}(O) \ge 0$, $\hat{\mu}(\emptyset) = 0$, かつ $O_1 \subset O_2 \Longrightarrow \hat{\mu}(O_1) \le \hat{\mu}(O_2)$. そこで，任意の開集合列 $\{O_n\}_{n=1}^\infty$ に対して

$$\hat{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^\infty O_n\right) \le \sum_{n=1}^\infty \hat{\mu}(O_n) \tag{A.10}$$

を示そう．$f \in C_c(\Omega)$, $0 \le f \le 1$, $\mathrm{supp}(f) \subset \bigcup_{n=1}^\infty O_n$ とする．各 $\omega \in \mathrm{supp}(f)$ について，$\omega \in O_n$ とすると，ω のコンパクト近傍 V_ω が存在して $V_\omega \subset O_n$. $\mathrm{supp}(f)$ のコンパクト性より，有限個の $\omega_1, \dots, \omega_m \in \mathrm{supp}(f)$ がとれて $\mathrm{supp}(f) \subset \bigcup_{k=1}^m V_{\omega_k}$. 改めて $K_k = V_{\omega_k}$ $(k = 1, \dots, m)$ とおくと，K_k はコンパクトで，ある $n_k \in \mathbb{N}$ で $K_k \subset O_{n_k}$ であり，$\mathrm{supp}(f) \subset \bigcup_{k=1}^m K_k$. ここで，同じ O_n に含まれる K_k の合併をとればよいから，$n_1, \dots, n_m$ はすべて異なるとしてよい．ウリゾーンの補題より，$0 \le f_k \le 1$ である $f_k \in C_c(\Omega)$ が存在して $f_k(\omega) = 1$ $(\omega \in K_k)$ かつ $\mathrm{supp}(f_k) \subset O_{n_k}$. このとき，$\sum_{k=1}^m f_k(\omega) \ge 1$ $(\omega \in \mathrm{supp}(f))$ だから $f \le \sum_{k=1}^m f_k$ となり，φ が正値だから

$$\varphi(f) \le \sum_{k=1}^m \varphi(f_k) \le \sum_{k=1}^m \hat{\mu}(O_{n_k}) \le \sum_{n=1}^\infty \hat{\mu}(O_n).$$

f について左辺の上限をとると，(A.10) が得られる．

次に，任意の $E \subset \Omega$ に対して

$$\mu^*(E) = \inf\{\hat{\mu}(O) : O \text{ は開集合},\ E \subset O\} \tag{A.11}$$

と定める．明らかに，開集合 O に対しては $\mu^*(O) = \hat{\mu}(O)$ であり，特に $\mu^*(\emptyset) = \hat{\mu}(\emptyset) = 0$. また，$E_1 \subset E_2 \Longrightarrow \mu^*(E_1) \le \mu^*(E_2)$ も明らか．任意の $E_n \subset \Omega$ $(n = 1, 2, \ldots)$ と $\varepsilon > 0$ に対して，開集合 $O_n \supset E_n$ がとれて $\hat{\mu}(O_n) \le \mu^*(E_n) + \varepsilon/2^n$. $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ だから，(A.10) より

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \le \hat{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(O_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$. したがって，$\mu^*$ はいわゆるカラテオドリーの外測度となる．それゆえ，$\mathcal{M}$ を μ^* に関して可測な集合の全体，すなわち，すべての $E \subset \Omega$ に対して

$$\mu^*(E) \ge \mu^*(E \cap S) + \mu^*(E \cap S^c)$$

を満たす $S \subset \Omega$ の全体とすると，$\mathcal{M}$ は σ-集合体であり $\mu^*|\mathcal{M}$ は $(\Omega, \mathcal{M})$ 上の測度となる．そこで $\mathcal{B}_\Omega \subset \mathcal{M}$ を示そう．そのためには，任意の開集合 O が $\mathcal{M}$ に属することをいえばよい．$E \subset \Omega$ と開集合 $O' \supset E$ を任意にとり，$f \in C_c(\Omega)$, $0 \le f \le 1$, $\mathrm{supp}(f) \subset O' \cap O$ とする．$g \in C_c(\Omega)$, $0 \le g \le 1$, $\mathrm{supp}(g) \subset O' \setminus \mathrm{supp}(f)$ のとき，$0 \le f + g \le 1$ かつ $\mathrm{supp}(f+g) \subset O'$ となるから

$$\hat{\mu}(O') \ge \varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g).$$

f を固定して g について $\varphi(g)$ の上限をとると，$O' \setminus \mathrm{supp}(f) \supset O' \cap O^c \supset E \cap O^c$ だから

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(O') &\ge \varphi(f) + \hat{\mu}(O' \setminus \mathrm{supp}(f)) \\ &\ge \varphi(f) + \mu^*(E \cap O^c). \end{aligned}$$

さらに，f について $\varphi(f)$ の上限をとると，$O' \cap O \supset E \cap O$ だから

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(O') &\ge \hat{\mu}(O' \cap O) + \mu^*(E \cap O^c) \\ &\ge \mu^*(E \cap O) + \mu^*(E \cap O^c). \end{aligned}$$

これがすべての開集合 $O' \supset E$ に対して成立するから

$$\mu^*(E) \ge \mu^*(E \cap O) + \mu^*(E \cap O^c).$$

よって $O \in \mathcal{M}$ となり，$\mathcal{B}_\Omega \subset \mathcal{M}$ が示せた．また $\mu^*(\Omega) = \hat{\mu}(\Omega) \leq ||\varphi|| < +\infty$. ゆえに，$\mu = \mu^*|\mathcal{B}_\Omega$ とすると，μ は $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ 上の有限正測度となる．

次に，上で構成した μ について，(A.8) が成立することを証明する．(A.8) の両辺は f について線型であるから，$f \in C_0(\Omega)$, $f \geq 0$ について示せばよい．いま，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$O_n = \{\omega \in \Omega : f(\omega) > n\varepsilon\}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

とおくと，$\{O_n\}$ は単調減少であり，ある N で $O_{N+1} = \emptyset$. $\{\omega : f(\omega) > 0\} = \bigcup_{n=0}^{N}(O_n \setminus O_{n+1})$ だから $\int_\Omega f d\mu = \sum_{n=0}^{N} \int_{O_n \setminus O_{n+1}} f d\mu$. $\omega \in O_n \setminus O_{n+1}$ のとき $n\varepsilon < f(\omega) \leq (n+1)\varepsilon$ だから

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n\varepsilon\mu(O_n \setminus O_{n+1}) &\leq \int_\Omega f d\mu \\ &\leq \sum_{n=0}^{N}(n+1)\varepsilon\mu(O_n \setminus O_{n+1}) \\ &\leq \sum_{n=0}^{N} n\varepsilon\mu(O_n \setminus O_{n+1}) + \varepsilon\mu(\Omega). \qquad \text{(A.12)}\end{aligned}$$

さらに

$$\sum_{n=0}^{N} n\mu(O_n \setminus O_{n+1}) = \sum_{n=0}^{N} n\{\mu(O_n) - \mu(O_{n+1})\} = \sum_{n=1}^{N} \mu(O_n). \qquad \text{(A.13)}$$

他方，各 $n = 1, \ldots, N$ について，$\overline{O_{n+1}} \subset O_n$ で $\overline{O_{n+1}}$ がコンパクトであるから，ウリゾーンの補題より，$0 \leq g_n \leq 1$ である $g_n \in C_c(\Omega)$ が存在して $g_n(\omega) = 1$ $(\omega \in \overline{O_{n+1}})$ かつ $\mathrm{supp}(g_n) \subset O_n$. このとき，(A.9) と φ の正値性より

$$\mu(O_{n+1}) \leq \varphi(g_n) \leq \mu(O_n).$$

よって

$$\varphi\left(\sum_{n=1}^{N} g_n\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(O_n) \leq \varphi\left(\sum_{n=1}^{N} g_n\right) + \mu(O_1). \qquad \text{(A.14)}$$

(A.12)–(A.14) を合わせて

$$\left|\int_\Omega f d\mu - \varepsilon\varphi\left(\sum_{n=1}^{N} g_n\right)\right| \leq 2\varepsilon\mu(\Omega) \leq 2\varepsilon||\varphi||. \qquad \text{(A.15)}$$

ところで，$\omega \in \Omega \backslash O_1$ のとき，$g_k(\omega) = 0\ (1 \leq k \leq N)$ だから $\sum_{k=1}^N g_k(\omega) = 0$ であり，また $0 \leq f(\omega) \leq \varepsilon$. $\omega \in O_n \backslash O_{n+1}$ のとき，$g_k(\omega) = 1\ (1 \leq k < n)$ かつ $g_k(\omega) = 0\ (n < k \leq N)$ だから $n - 1 \leq \sum_{k=1}^N g_k(\omega) \leq n$ であり，また $n\varepsilon < f(\omega) \leq (n+1)\varepsilon$. したがって，すべての $\omega \in \Omega$ に対して

$$\varepsilon \sum_{k=1}^N g_k(\omega) \leq f(\omega) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^N g_k(\omega) + 2\varepsilon.$$

ゆえに $||f - \varepsilon \sum_{n=1}^N g_n|| \leq 2\varepsilon$ となるから，$|\varphi(f) - \varepsilon\varphi(\sum_{n=1}^N g_n)| \leq 2\varepsilon||\varphi||$. (A.15) と合わせて

$$\left|\varphi(f) - \int_\Omega f d\mu\right| \leq 4\varepsilon||\varphi||.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから (A.8) を得る．

(A.9) より，$0 \leq f_n \leq 1$ である $\{f_n\} \subset C_c(\Omega)$ がとれて $\varphi(f_n) \to \mu(\Omega)$. $\varphi(f_n) = \int_\Omega f_n d\mu \leq \mu(\mathrm{supp}(f_n))$ だから，$K_n = \mathrm{supp}(f_n)$ とおくと，$\{K_n\}$ はコンパクト集合列で $\mu(K_n) \to \mu(\Omega)$. 任意の $S \in \mathcal{B}_\Omega$ と $\varepsilon > 0$ に対して，(A.11) より開集合 $O \supset S^c$ が存在して $\mu(O) \leq \mu(S^c) + \varepsilon$. よって $O^c \subset S$ で $\mu(O^c) \geq \mu(S) - \varepsilon$. $O^c \cap K_n$ がコンパクトで $\mu(O^c) - \mu(O^c \cap K_n) \leq \mu(\Omega \setminus K_n) \to 0$. ゆえに，$n$ を十分大きくとると $\mu(O^c \cap K_n) \geq \mu(S) - 2\varepsilon$ となり，(A.5) が成立．以上で，μ は正則で (A.8) を満たすことが証明できた． ■

$\varphi \in C_0(\Omega)^*$ は，$\varphi(\overline{f}) = \overline{\varphi(f)}\ (f \in C_0(\Omega))$ が成立するとき，**自己共役**といわれる．これは次と同値：$f \in C_0(\Omega)$ が実数値ならば $\varphi(f) \in \mathbb{R}$. 任意の $\varphi \in C_0(\Omega)^*$ について，$\varphi^*(f) = \overline{\varphi(\overline{f})}\ (f \in C_0(\Omega))$ と定めると $\varphi^* \in C_0(\Omega)^*$. このとき，$\varphi' = (\varphi + \varphi^*)/2$, $\varphi'' = (\varphi - \varphi^*)/2i$ とおくと，$\varphi', \varphi'' \in C_0(\Omega)^*$ は自己共役で $\varphi = \varphi' + i\varphi''$ と書ける．さらに次が成立．

補題 A.2.7 任意の $\varphi \in C_0(\Omega)^*$ に対して，正値の $\varphi_1, \ldots, \varphi_4 \in C_0(\Omega)^*$ が存在して $\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2) + i(\varphi_3 - \varphi_4)$.

証明 上で述べた事実から，φ は自己共役として十分．このとき，正値の φ_1, φ_2 が存在して $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ と書けることを示せばよい．$C_0(\Omega)_+ = \{f \in C_0(\Omega) : f \geq 0\}$ とする．各 $f \in C_0(\Omega)_+$ に対して

$$\psi(f) = \sup\{|\varphi(g)| : g \in C_0(\Omega),\ |g| \leq f\} \qquad \text{(A.16)}$$

と定める．$\psi(\alpha f) = \alpha\psi(f)$ $(\alpha \geq 0)$ は明らか．そこで，$f_1, f_2 \in C_0(\Omega)_+$ に対して $\psi(f_1 + f_2) = \psi(f_1) + \psi(f_2)$ を示す．$g_1, g_2 \in C_0(\Omega)$, $|g_1| \leq f_1$, $|g_2| \leq f_2$ のとき，$\alpha_k \in \mathbb{C}$, $|\alpha_k| = 1$ により $|\varphi(g_k)| = \alpha_k\varphi(g_k)$ $(k = 1, 2)$ とできて，$|\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2| \leq f_1 + f_2$ だから

$$|\varphi(g_1)| + |\varphi(g_2)| = \varphi(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) \leq \psi(f_1 + f_2).$$

よって $\psi(f_1) + \psi(f_2) \leq \psi(f_1 + f_2)$. 逆に，$g \in C_0(\Omega)$, $|g| \leq f_1 + f_2$ のとき，$V = \{\omega : f_1(\omega) + f_2(\omega) > 0\}$ とおき

$$g_1(\omega) = \frac{f_1(\omega)g(\omega)}{f_1(\omega) + f_2(\omega)}, \quad g_2(\omega) = \frac{f_2(\omega)g(\omega)}{f_1(\omega) + f_2(\omega)}, \qquad \omega \in V,$$

$$g_1(\omega) = g_2(\omega) = 0, \qquad \omega \in \Omega \setminus V$$

と定めると，$g_1, g_2 \in C_0(\Omega)$ となることが簡単に確かめられる．$|g_1| \leq f_1$, $|g_2| \leq f_2$, $g = g_1 + g_2$ だから

$$|\varphi(g)| = |\varphi(g_1) + \varphi(g_2)| \leq |\varphi(g_1)| + |\varphi(g_2)| \leq \psi(f_1) + \psi(f_2).$$

よって $\psi(f_1+f_2) \leq \psi(f_1)+\psi(f_2)$ となり，等号成立．したがって，$f \in C_0(\Omega)$ が実数値のとき，$f = f_1 - f_2$ $(f_1, f_2 \in C_0(\Omega)_+)$ と表して $\psi(f) = \psi(f_1) - \psi(f_2)$ と定義することができる．実際，別に $f = g_1 - g_2$ $(g_1, g_2 \in C_0(\Omega)_+)$ のとき，$f_1 + g_2 = f_2 + g_1$ より $\psi(f_1) + \psi(g_2) = \psi(f_2) + \psi(g_1)$ だから $\psi(f_1) - \psi(f_2) = \psi(g_1) - \psi(g_2)$. このとき，$\psi(\alpha f) = \alpha\psi(f)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ に注意する．さらに，一般の $f \in C_0(\Omega)$ に対して $\psi(f) = \psi(\mathrm{Re}\, f) + i\psi(\mathrm{Im}\, f)$ と定めると，ψ が $C_0(\Omega)$ 上の線型汎関数となることは容易に示せる．ところで，(A.16) より

$$0 \leq \psi(f) \leq ||\varphi||\, ||f||, \qquad f \in C_0(\Omega)_+$$

が得られる．任意の $f \in C_0(\Omega)$ について，$f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4)$, $f_k \in C_0(\Omega)_+$, $||f_k|| \leq ||f||$ と表されるから，$|\psi(f)| \leq \sum_{k=1}^{4} \psi(f_k) \leq 4||\varphi||\, ||f||$. ゆえに $\psi \in C_0(\Omega)^*$. $f \in C_0(\Omega)_+$ のとき，(A.16) より $|\varphi(f)| \leq \psi(f)$ かつ $\varphi(f) \in \mathbb{R}$ であるから，$(\psi \pm \varphi)(f) \geq 0$. したがって，$\varphi_1 = (\psi + \varphi)/2$, $\varphi_2 = (\psi - \varphi)/2$ は正値となり $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. ■

系 A.2.8 (リース-マルコフ-角谷の表現定理) 任意の $\varphi \in C_0(\Omega)^*$ に対して，$\mu \in M(\Omega)$ が一意に存在して

$$\varphi(f) = \int_\Omega f d\mu, \qquad f \in C_0(\Omega).$$

このとき $||\varphi|| = ||\mu||$. したがって，$(f, \mu) \in C_0(\Omega) \times M(\Omega) \mapsto \int_\Omega f d\mu$ により，$M(\Omega) \cong C_0(\Omega)^*$ (等距離同型) であり，$M(\Omega)$ は全変動ノルムによりバナッハ空間.

証明 任意の $\varphi \in C_0(\Omega)^*$ に対して，上の補題より正値の $\varphi_k \in C_0(\Omega)^*$ がとれて $\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2) + i(\varphi_3 - \varphi_4)$. 定理 A.2.6 より，$\mu_k \in M(\Omega)$ が存在して $\varphi_k = \varphi_{\mu_k}$ $(k = 1, \ldots, 4)$. よって，$\mu = (\mu_1 - \mu_2) + i(\mu_3 - \mu_4) \in M(\Omega)$ により $\varphi = \varphi_\mu$. これで，$\mu \in M(\Omega) \mapsto \varphi_\mu \in C_0(\Omega)^*$ は等距離同型写像であることが示せた. これより，すべての結論が得られる. ■

この節の最後に，空間 Ω が適当な条件を満たせば，$(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ 上の有限正測度がすべて自動的に正則になることを示しておこう. 特に，距離空間では開集合がすべて F_σ-集合 (i.e. 閉集合の可算和) であるから，Ω が σ-コンパクト (i.e. コンパクト集合の可算和) で距離づけ可能な空間のとき，次の命題の結論が従う.

命題 A.2.9 Ω のすべての開集合が σ-コンパクトのとき，$(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ 上の任意の複素数値測度はラドン測度である.

証明 $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ 上の任意の有限正測度 ν が正則であることを示せばよい. $\varphi(f) = \int_\Omega f d\nu$ $(f \in C_0(\Omega))$ と定めると，明らかに $\varphi \in C_0(\Omega)^*$ となり，φ は正値. よって定理 A.2.6 より，正の $\mu \in M(\Omega)$ が存在して $\int_\Omega f d\nu = \int_\Omega f d\mu$ $(f \in C_0(\Omega))$. そこで $\nu = \mu$ を示す. $O \subset \Omega$ を開集合とすると，仮定よりコンパクト集合列 $\{K_n\}$ がとれて $O = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$. ウリゾーンの補題より，$0 \le f_n \le 1$ である $f_n \in C_c(\Omega)$ がとれて $f_n(\omega) = 1$ $(\omega \in K_n)$ かつ $\mathrm{supp}(f_n) \subset O$. $g_n = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$ とおくと，$f_n \uparrow 1_O$ だから，単調収束定理より

$$\nu(O) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n d\mu = \mu(O).$$

いま，$S \in \mathcal{B}_\Omega$ と $\varepsilon > 0$ を任意にとると，μ の正則性より，$K \subset S \subset O$ であるコンパクト集合 K と開集合 O が存在して $\mu(O \backslash K) < \varepsilon$. $\nu(O \backslash K) = \mu(O \backslash K)$

に注意して

$$\nu(S) \le \nu(O) = \mu(O) \le \mu(K) + \varepsilon \le \mu(S) + \varepsilon,$$

$$\mu(S) \le \mu(O) = \nu(O) \le \nu(K) + \varepsilon \le \nu(S) + \varepsilon.$$

ゆえに $|\nu(S) - \mu(S)| \le \varepsilon$ となり，$\varepsilon > 0$ が任意だから $\nu(S) = \mu(S)$. ■

A.3　クレイン-ミルマンの定理

この節では，この本の中身では直接には使われていないが，次節で必要になるクレイン-ミルマンの端点定理を証明する.

定義 A.3.1　X を線型空間とし，C を X の凸部分集合とする.

(1) $x \in C$ が任意の $y, z \in C$ と $0 < \lambda < 1$ について

$$x = \lambda y + (1-\lambda)z \implies x = y = z$$

を満たすとき，x を C の**端点**という．C の端点の全体を $\mathrm{ex}\, C$ で表す.

(2) C の空でない凸部分集合 F が任意の $x, y \in C$ と $0 < \lambda < 1$ について

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in F \implies x, y \in F$$

を満たすとき，F を C の**フェイス** (または**台**) という．したがって，$x \in \mathrm{ex}\, C \iff \{x\}$ が C のフェイス.

(3) X が位相線型空間のとき，空でない $K \subset X$ に対して，K の閉凸包 (i.e. K を含む最小の閉凸集合) を $\overline{\mathrm{co}}\, K$ で表す.

次の補題は簡単に示せる.

補題 A.3.2　C を線型空間 X の凸部分集合とする.

(1) C のフェイスの族 $\{F_\alpha\}$ が $\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$ ならば，$\bigcap_\alpha F_\alpha$ も C のフェイスである.

(2) C_0 が C のフェイスのとき，F が C_0 のフェイスならば F は C のフェイスである．特に，$x \in \mathrm{ex}\, C_0 \Longrightarrow x \in \mathrm{ex}\, C$.

定理 A.3.3 (クレイン-ミルマンの端点定理)　X を局所凸位相線型空間とし，C を X の空でないコンパクト凸部分集合とする．このとき，$\mathrm{ex}\, C \neq \emptyset$ であり $C = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ex}\, C)$.

証明 C のフェイスで閉であるもの全体を $\mathcal{F}$ とおく．$C \in \mathcal{F}$ より $\mathcal{F} \neq \emptyset$. $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ に対して，$F_1 \leq F_2 \Longleftrightarrow F_1 \supset F_2$ と定めると，明らかに $\leq$ は $\mathcal{F}$ における順序関係である．$\{F_\alpha\}$ を $\mathcal{F}$ の全順序部分集合とする．$\{F_\alpha\}$ がコンパクト集合 C の閉集合の族で有限交叉性 (i.e. 任意の有限個の共通部分が空でない) をもつから，$F = \bigcap_\alpha F_\alpha$ は空でない閉集合．補題 A.3.2 (1) より $F \in \mathcal{F}$ となり，F は $\{F_\alpha\}$ の上界である．ゆえに $(\mathcal{F}, \leq)$ が帰納的な順序集合となるから，ツォルンの補題より $\mathcal{F}$ は極大元 F_0 をもつ．いま $x, y \in F_0$, $x \neq y$ とすると，定理 A.1.10 より，X 上の連続な線型汎関数 f がとれて $\mathrm{Re}\, f(x) > \mathrm{Re}\, f(y)$. F_0 がコンパクトだから，$\alpha = \max_{z \in F_0} \mathrm{Re}\, f(z)$ とおき $F_1 = \{z \in F_0 : \mathrm{Re}\, f(z) = \alpha\}$ とすると，F_1 は空でない閉凸集合．また，F_1 が F_0 のフェイスであることも簡単に確かめられる．よって補題 A.3.2 (2) より $F_1 \in \mathcal{F}$ となり，$F_1 \subsetneqq F_0$ だから F_0 の極大性に反する．したがって $F_0 = \{x_0\}$ がわかり $x_0 \in \mathrm{ex}\, C$. これで $\mathrm{ex}\, C \neq \emptyset$ が示せた．

次に，$C_0 = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ex}\, C)$ とおくと，C_0 は C の閉凸部分集合であり，それゆえ C_0 はコンパクト．$C_0 \neq C$ として $x \in C \setminus C_0$ をとると，定理 A.1.10 (2) より，X 上の連続な線型汎関数 f が存在して $\mathrm{Re}\, f(x) > \sup_{y \in C_0} \mathrm{Re}\, f(y)$. $\beta = \max_{y \in C} \mathrm{Re}\, f(y)$ とおき，$C_1 = \{y \in C : \mathrm{Re}\, f(y) = \beta\}$ とすると，$C_1 \in \mathcal{F}$ かつ $C_0 \cap C_1 = \emptyset$. 前半の結論を C_1 に適用すると，$x_1 \in \mathrm{ex}\, C_1$ が存在して，補題 A.3.2 (2) より $x_1 \in \mathrm{ex}\, C \subset C_0$ となるが，これは $C_0 \cap C_1 = \emptyset$ と矛盾する．ゆえに $C = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ex}\, C)$ が従う． ■

次の結果はミルマンによる．

命題 A.3.4 X を局所凸位相線型空間とし，K を X の空でないコンパクト部分集合とする．$\overline{\mathrm{co}}\, K$ がコンパクトならば $\mathrm{ex}(\overline{\mathrm{co}}\, K) \subset K$.

証明 $C = \overline{\mathrm{co}}\, K$ とおき $x_0 \in \mathrm{ex}\, C$ とする．V を $0 \in X$ の任意の閉凸近傍とすると，K のコンパクト性より有限個の $y_1, \ldots, y_n \in K$ が存在して $K \subset \bigcup_{i=1}^n (y_i + V)$. $K_i = K \cap (y_i + V)$ とおいて $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$. いま，$C_i = \overline{\mathrm{co}}\, K_i$ とおくと，$C_i \subset C$ だから C_i はコンパクト．さらに，$\Delta \subset \mathbb{R}^n$ を

$$\Delta = \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) : \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

とすると，$\Delta\times C_1\times\cdots\times C_n$ は直積位相でコンパクトであり，写像 $((\lambda_i),x_1,\ldots,x_n)\in\Delta\times C_1\times\cdots\times C_n\mapsto\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\in X$ の連続性から

$$\left\{\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i:(\lambda_i)\in\Delta,\ x_i\in C_i\ (i=1,\ldots,n)\right\}\tag{A.17}$$

はコンパクト (よって閉集合) である．さらに，集合 (A.17) が各 C_i を含む凸集合であることは容易にわかる．ゆえに (A.17) は C と一致するので，$x_0=\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i$ $((\lambda_i)\in\Delta,\ x_i\in C_i)$ と表される．$\lambda_i>0$ として，$x_0=\lambda_i x_i+(1-\lambda_i)y$ $(y\in C)$ と書ける．このとき，$x_0\in\mathrm{ex}\,C$ より $x_0=x_i\in C_i$ となり，$x_0\in y_i+V\subset K+V$. V が 0 の任意の閉凸近傍であるから，$x_0\in K$ がいえる．■

上の命題と関連して次の事実に注意する：X をバナッハ空間とし，K が X の弱コンパクトならば，$\overline{\mathrm{co}}\,K$ も弱コンパクト (**クレイン-シュムリアンの定理**).

ここで，端点集合の例を証明なしで示しておく．

例 A.3.5　(1) Ω をコンパクト・ハウスドルフ空間とし，$C(\Omega)$ を Ω の複素数値連続関数のなすバナッハ空間とする．$B=\{f\in C(\Omega):\|f\|\le 1\}$ (単位閉球)，$C=\{f\in B:$ 実数値 $\}$ とすると，B,C は閉凸集合であり，$\mathrm{ex}\,B=\{f\in C(\Omega):|f(\omega)|=1\ (\omega\in\Omega)\}$, $\mathrm{ex}\,C=\{f\in C(\Omega):f(\omega)=\pm1\ (\omega\in\Omega)\}$. 特に，$\Omega$ が連結ならば，$\mathrm{ex}\,C=\{\pm1\}$ となり $C\neq\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ex}\,C)$. しかし，一般に $B=\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ex}\,B)$ が成立する．

(2) $C(\Omega)$ は上と同じとする．系 A.2.8 より，$M(\Omega)$ に $C(\Omega)$ から入る弱 $*$ 位相を考える．$(\Omega,\mathcal{B}_\Omega)$ 上の正則な確率測度の全体を $P(\Omega)$ で表す．つまり $P(\Omega)=\{\mu\in M(\Omega):\mu\ge0,\ \mu(\Omega)=1\}$. このとき，$P(\Omega)$ は弱 $*$ コンパクトであり，$\mathrm{ex}\,P(\Omega)=\{\delta_\omega:\omega\in\Omega\}$ かつ $P(\Omega)=\overline{\mathrm{co}}\{\delta_\omega:\omega\in\Omega\}$. ただし δ_ω は 1 点 ω に集中した確率測度であり，$C(\Omega)^*$ の元としては $\delta_\omega(f)=f(\omega)$ $(f\in C(\Omega))$. さらに，$\omega\mapsto\delta_\omega$ は Ω と $\mathrm{ex}\,P(\Omega)$ の間の位相同型を与える．

(3) $\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とし，$\mathcal{B}(\mathcal{H})_1=\{A\in\mathcal{B}(\mathcal{H}):\|A\|\le1\}$ とすると，$\mathrm{ex}\,\mathcal{B}(\mathcal{H})_1=\{A\in\mathcal{B}(\mathcal{H}):A$ または A^* が等距離作用素 $\}$ がよく知られている．$\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ は WOT でコンパクトだから，定理 A.3.3 より $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1=\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ex}\,\mathcal{B}(\mathcal{H})_1)$ であるが，実はもっと強く，$\mathcal{B}(\mathcal{H})_1=\overline{\mathrm{co}}\{U\in\mathcal{B}(\mathcal{H}):$ ユニタリー $\}$ (**ルッソ-ダイの定理**). また $\mathrm{ex}\{A\in\mathcal{B}(\mathcal{H}):0\le A\le I\}=\mathcal{P}(\mathcal{H})$ (射影の全体).

クレイン-ミルマンの定理の発展として，端点分解に関する**ショケー理論**が有名である．以下，これについて簡単に触れておこう．X を局所凸位相線型空間とし，Ω を X のコンパクト凸集合とする．$\mu \in P(\Omega)$ のとき，次のような $x_0 \in \Omega$ が一意に存在する：X 上の任意の連続な線型汎関数 f に対して $f(x_0) = \int_\Omega f d\mu$. このとき，$\mu$ が x_0 を表すといい，また x_0 が μ の重心ともいう．逆に，$x_0 \in \Omega$ が与えられたとき，x_0 を表す $\mu \in P(\Omega)$ として少なくとも δ_{x_0} が存在するが，クレイン-ミルマンの定理の観点からは，μ の台がある意味で $\mathrm{ex}\,\Omega$ に含まれるものが期待される．これに応えるのが次の**ショケー-ビショップ-ド・リューの定理**である：任意の $x_0 \in \Omega$ に対して，x_0 を表す $\mu \in P(\Omega)$ で，Ω のベール集合 S について $S \cap \mathrm{ex}\,\Omega = \emptyset \Longrightarrow \mu(S) = 0$ となるものが存在する．ここで，ベール集合とは Ω のコンパクト G_δ 集合の全体から生成される σ-集合体の要素のことである．特に，Ω が距離づけ可能のときは，$\mathrm{ex}\,\Omega$ が G_δ 集合となり，x_0 を表し $\mu(\mathrm{ex}\,\Omega) = 1$ である $\mu \in P(\Omega)$ が存在する．さらに，各 $x_0 \in \Omega$ の表現測度 μ がただ1つであるためには，Ω がショケー単体であることが必要十分である．上に述べた定理の証明やショケー単体の定義などの詳細は略する．

A.4　ストーン-ワイエルシュトラスの定理

この本でストーン-ワイエルシュトラスの定理を何度か使っているが，この節でそれの証明を与える．実際，ストーン-ワイエルシュトラスより強いビショップの定理を与えるが，証明はストーン-ワイエルシュトラスを示すのに必要な部分だけにする．この証明には，A.1–A.3 節の結果がうまく使われる．

この節では，Ω を任意のコンパクト・ハウスドルフ空間とし，Ω 上の複素数値連続関数の全体からなるバナッハ空間 $C(\Omega)$ で考える．まず，次の補題を準備する．

補題 A.4.1　(1) 任意の $\mu \in M(\Omega)$ に対して

$$O_0 = \bigcup \{O : O \subset \Omega \text{ は開集合}, |\mu|(O) = 0\}$$

とおくと，$|\mu|(O_0) = 0$. つまり O_0 は $|\mu|(O) = 0$ である開集合 O で最大のものである．このとき，$\mathrm{supp}(\mu) = \Omega \setminus O_0$ と定め，μ の**台**と呼ぶ．

(2) $\mu \in M(\Omega)$ とし，f を Ω 上の有界ボレル関数とする．

$$(f\mu)(S) = \int_S f d\mu \left(= \int_S f \frac{d\mu}{d|\mu|} d|\mu| \right), \qquad S \in \mathcal{B}_\Omega$$

と定めると，$f\mu \in M(\Omega)$ であり

$$||f\mu|| = \int_\Omega |f| d|\mu|, \tag{A.18}$$

$$\int_\Omega g d(f\mu) = \int_\Omega g f d\mu, \qquad g \in C(\Omega). \tag{A.19}$$

(3) 上の (2) で $f \in C(\Omega)$ のとき

$$f\mu = 0 \Longleftrightarrow f|\operatorname{supp}(\mu) = 0.$$

証明　(1) コンパクト集合 K が $K \subset O_0$ のとき，$|\mu|(O_k) = 0$ となる有限個の開集合 $O_1, \ldots, O_n$ がとれて $K \subset \bigcup_{k=1}^n O_k$. よって $|\mu|(K) \leq \sum_{k=1}^n |\mu|(O_k) = 0$. したがって，$|\mu|$ の正則性より $|\mu|(O_0) = 0$.

(2) $f\mu$ が $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ 上の複素数値測度で $d(f\mu)/d|\mu| = f(d\mu/d|\mu|)$ であるから，補題 A.2.2 より

$$|f\mu|(S) = \int_S \left| f \frac{d\mu}{d|\mu|} \right| d|\mu| = \int_S |f| d|\mu|, \qquad S \in \mathcal{B}_\Omega.$$

ゆえに，補題 A.2.5 (1) の証明と同様に，$|\mu|$ の正則性から $|f\mu|$ も正則であることがわかる．よって $f\mu \in M(\Omega)$. また，上で $S = \Omega$ とおいて $||f\mu|| = \int_\Omega |f| d|\mu|$. 任意の $g \in C(\Omega)$ に対して，補題 A.2.5 (3) の証明より

$$\int_\Omega g d(f\mu) = \int_\Omega g \frac{d(f\mu)}{d|\mu|} d|\mu| = \int_\Omega g f \frac{d\mu}{d|\mu|} d|\mu| = \int_\Omega g f d\mu.$$

(3) $f \in C(\Omega)$ のとき，$\{\omega : |f(\omega)| > 0\}$ が開集合であるから

$$\begin{aligned} f\mu = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \int_\Omega |f| d|\mu| = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \{\omega : |f(\omega)| > 0\} \subset O_0 \\ &\Longleftrightarrow \quad f|\operatorname{supp}(\mu) = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

定義 A.4.2　(1) $\mathcal{A}$ が Ω 上の**関数環**であるとは，$\mathcal{A}$ が $C(\Omega)$ の閉部分環 (i.e. 閉部分空間で $f, g \in \mathcal{A} \Longrightarrow fg \in \mathcal{A}$) であり，$1 \in \mathcal{A}$, かつ $\mathcal{A}$ が Ω の 2 点を分離，すなわち，任意の異なる $\omega, \omega' \in \Omega$ に対して $f(\omega) \neq f(\omega')$ となる $f \in \mathcal{A}$ が存在するときをいう．

(2) $\mathcal{A}$ を Ω 上の関数環とする．$K \subset \Omega$ が $\mathcal{A}$ に対する**反対称集合**であるとは，$f \in \mathcal{A}$ が K 上で実数値ならば $f|K$ が定数となるときをいう．

定理 A.4.3 (ビショップの定理)　$\mathcal{A}$ を Ω 上の関数環とし，$\mathcal{K}$ を $\mathcal{A}$ に対する極大反対称集合の全体とする．このとき，$\mathcal{K}$ は閉集合からなる Ω の直和分割を与え，次が成立．

(1) $f \in C(\Omega)$ について

$$f|K \in \mathcal{A}|K \ \ (K \in \mathcal{K}) \implies f \in \mathcal{A}.$$

ただし $\mathcal{A}|K = \{f|K : f \in \mathcal{A}\}$.

(2) 任意の $K \in \mathcal{K}$ に対して，$\mathcal{A}|K$ は $C(K)$ で閉である．

証明　任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$\bigcup\{K : \text{反対称集合}, \omega \in K\}$ が反対称集合であることは明らか．K, K' が極大反対称集合で $K \cap K' \neq \emptyset$ ならば，$K \cup K'$ が反対称集合だから $K = K \cup K' = K'$. また，K が反対称集合ならば $\overline{K}$ もそうである．これらのことから，定理の最初の部分がわかる．以下，(1) を証明する．(2) はストーン-ワイエルシュトラスを示すのに必要でないので，証明は割愛する．

以下の証明は実質的にはド・ブランジュによる．$f_0 \in C(\Omega)$ が $f_0|K \in \mathcal{A}|K$ $(K \in \mathcal{K})$ であるが $f_0 \notin \mathcal{A}$ とする．系 A.1.7 より，$||\psi|| = 1$ である $\psi \in C(\Omega)^*$ が存在して $\psi|\mathcal{A} = 0$ かつ $\psi(f_0) \neq 0$. つまり

$$(\mathcal{A}^{\perp})_1 = \{\varphi \in C(\Omega)^* : ||\varphi|| \leq 1,\ \varphi(f) = 0\ (f \in \mathcal{A})\}$$

とおくと，$\psi(f_0) \neq 0$ となる $\psi \in (\mathcal{A}^{\perp})_1$ が存在する．明らかに $(\mathcal{A}^{\perp})_1$ は弱 $*$ 閉凸集合であり，さらにアラオグルの定理 (演習問題 1.17) より弱 $*$ コンパクト．したがって定理 A.3.3 より $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ex}(\mathcal{A}^{\perp})_1) = (\mathcal{A}^{\perp})_1$ となるから，$\varphi \in \mathrm{ex}(\mathcal{A}^{\perp})_1$ が存在して $\varphi(f_0) \neq 0$. $||\varphi|| = 1$ は明らか．系 A.2.8 より，$||\mu|| = 1$ である $\mu \in M(\Omega)$ により $\varphi(f) = \int f d\mu$ $(f \in C(\Omega))$ と表される．$K_\mu = \mathrm{supp}(\mu)$ (補題 A.4.1 (1)) として，K_μ が反対称集合であることを示す．

$f \in \mathcal{A}$ で $f|K_\mu$ が実数値とする．f の代わりに $\alpha f + \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0)$ を考えれば，K_μ 上で $0 < f < 1$ としてよい．このとき，補題 A.4.1 (3) より $f\mu, (1-f)\mu \in M(\Omega)$ が 0 でないから

$$\mu_1 = \frac{1}{||f\mu||} f\mu, \quad \mu_2 = \frac{1}{||(1-f)\mu||}(1-f)\mu$$

とおき，μ_1, μ_2 に対応する $C(\Omega)^*$ の要素を φ_1, φ_2 とする．(A.18) より

$$\begin{aligned} ||f\mu|| + ||(1-f)\mu|| &= \int_\Omega |f|d|\mu| + \int_\Omega |1-f|d|\mu| \\ &= \int_\Omega f d|\mu| + \int_\Omega (1-f)d|\mu| \\ &= \int_\Omega d|\mu| = ||\mu|| = 1 \end{aligned}$$

だから，$\lambda = ||f\mu||$ とおくと，$0 < \lambda < 1$ で $\mu = f\mu + (1-f)\mu = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$. つまり $\varphi = \lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$. さらに，任意の $g \in \mathcal{A}$ に対して，(A.19) より

$$\varphi_1(g) = \frac{1}{\lambda}\int gf d\mu = \frac{1}{\lambda}\varphi(gf) = 0$$

だから $\varphi_1 \in (\mathcal{A}^\perp)_1$. 同じく $\varphi_2 \in (\mathcal{A}^\perp)_1$. $\varphi \in \mathrm{ex}(\mathcal{A}^\perp)_1$ であったから，$\varphi = \varphi_1$, i.e. $\mu = \mu_1$. よって $(f-\lambda)\mu = 0$ となり，補題 A.4.1 (3) より K_μ 上で $f = \lambda$. これで K_μ が反対称集合であることが示せた．したがって K_μ はある $K \in \mathcal{K}$ に含まれる．仮定より $f_0|K = g_0|K$ となる $g_0 \in \mathcal{A}$ がとれて

$$0 \neq \varphi(f_0) = \int_K f_0 d\mu = \int_K g_0 d\mu = \varphi(g_0) = 0$$

となり矛盾．ゆえに (1) が示せた． ■

上の定理が得られてしまうと，次はほとんど明らかである．

定理 A.4.4 (ストーン-ワイエルシュトラスの定理)　$\mathcal{A}$ を $C(\Omega)$ の部分環 (i.e. 線型部分空間で $f, g \in \mathcal{A} \Longrightarrow fg \in \mathcal{A}$) とし，次の 3 条件を満たすとする：

(i) $1 \in \mathcal{A}$,

(ii) $f \in \mathcal{A} \Longrightarrow \overline{f} \in \mathcal{A}$,

(iii) $\mathcal{A}$ が Ω の 2 点を分離する，すなわち，任意の異なる $\omega, \omega' \in \Omega$ に対して $f \in \mathcal{A}$ が存在して $f(\omega) \neq f(\omega')$.

このとき $\mathcal{A}$ は $C(\Omega)$ で稠密である．

証明 閉包 $\overline{\mathcal{A}}$ は (i), (iii) より Ω 上の関数環となる．任意の $\omega, \omega' \in \Omega$, $\omega \neq \omega'$ に対して，(iii) より $f(\omega) \neq f(\omega')$ となる $f \in \mathcal{A}$ をとると，(ii) より $\mathrm{Re}\, f = (f + \overline{f})/2$, $\mathrm{Im}\, f = (f - \overline{f})/2i \in \mathcal{A}$ であり，$\mathrm{Re}\, f$ または $\mathrm{Im}\, f$ が ω, ω' を分離する．これより，$\overline{\mathcal{A}}$ に対する極大反対称集合はすべて 1 点からなる．したがって，(i) に注意すると，定理 A.4.3 (1) より $\overline{\mathcal{A}} = C(\Omega)$ が得られる． ■

注意 A.4.5 (1) Ω が局所コンパクト・ハウスドルフ空間のとき，ストーン-ワイエルシュトラスの定理は次のように述べられる．部分環 $\mathcal{A} \subset C_0(\Omega)$ が次の (i′) と上の (ii), (iii) を満たすならば，$\mathcal{A}$ は $C_0(\Omega)$ で稠密である：

(i′) 任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$f \in \mathcal{A}$ が存在して $f(\omega) \neq 0$.

これを証明するには，Ω の 1 点コンパクト化 $\Omega \cup \{\infty\}$ をとり，$\mathcal{A} + \mathbb{C}1 \subset C(\Omega \cup \{\infty\})$ に上の定理を適用すればよいが，詳細は略する．

(2) Ω 上の実数値連続関数のなす実バナッハ空間を $C_{\mathbb{R}}(\Omega)$ (局所コンパクトのときは $C_{0,\mathbb{R}}(\Omega)$) と表す．実数型のストーン-ワイエルシュトラスの定理は次のように述べられる．部分環 $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(\Omega)$ (または $\mathcal{A} \subset C_{0,\mathbb{R}}(\Omega)$) が上の (i) (または (i′)) と (iii) を満たすならば，$\mathcal{A}$ は $C_{\mathbb{R}}(\Omega)$ (または $C_{0,\mathbb{R}}(\Omega)$) で稠密である．この証明には，例えば $\mathcal{A} + i\mathcal{A}$ に複素型の定理を適用すればよい．

系 A.4.6 (1) **(ワイエルシュトラスの近似定理)** $[a, b]$ を $\mathbb{R}$ の有界閉区間とすると，複素係数多項式 $p(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$ の全体は $C([a, b])$ で稠密である．

(2) Ω を $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合とすると，ζ と $\overline{\zeta}$ の複素係数多項式 $p(\zeta) = \sum_{k,l=0}^{n} \alpha_{kl} \zeta^k \overline{\zeta}^l$ の全体は $C(\Omega)$ で稠密である．

(3) $\mathbb{T} = \{e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ のとき，3 角多項式 $p(e^{it}) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikt}$ の全体は $C(\mathbb{T})$ で稠密である．

証明 (1)–(3) のそれぞれで述べられた多項式の全体を $\mathcal{A}$ とすると，$\mathcal{A}$ は環であり，定理 A.4.4 の条件 (i)–(iii) を満たすことは明らか． ■

A.5 ゲルファンド-ナイマルクの定理

この節では，可換 C^*-環に関するゲルファンド-ナイマルクの定理と正規作用素のスペクトル分解定理を証明する．

定義 A.5.1　(1) $\mathcal{A}$ が $\mathbb{C}$ 上のバナッハ空間であり，積 $(x,y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto xy \in \mathcal{A}$ が定義されて，任意の $x, y, z \in \mathcal{A}$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

(i) $(xy)z = x(yz)$,

(ii) $(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$,

(iii) $(x+y)z = xy + yz$,

(iv) $x(y+z) = xy + xz$,

(v) $||xy|| \leq ||x||\,||y||$

を満たすとき，$\mathcal{A}$ を**バナッハ環**という．すべての $x, y \in \mathcal{A}$ に対して $xy = yx$ のとき，$\mathcal{A}$ は**可換**といわれる．

(2) バナッハ環 $\mathcal{A}$ に**対合** ($*$-演算) $x \in \mathcal{A} \mapsto x^* \in \mathcal{A}$ が定義されて，任意の $x, y \in \mathcal{A}$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

(i) $(x^*)^* = x$,

(ii) $(x+y)^* = x^* + y^*$,

(iii) $(\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^*$,

(iv) $(xy)^* = y^* x^*$,

(v) $||x^*|| = ||x||$

を満たすとき，$\mathcal{A}$ を**バナッハ $*$-環**という．

(3) バナッハ $*$-環 $\mathcal{A}$ が $||x^*x|| = ||x||^2$ $(x \in \mathcal{A})$ を満たすとき，$\mathcal{A}$ を **C^*-環**という．

バナッハ環 $\mathcal{A}$ において，$1 \in \mathcal{A}$ が $\mathcal{A}$ の**単位元**とは，$1x = x1 = x$ $(x \in \mathcal{A})$ となるときをいう．$\mathcal{A}$ の単位元は存在すればただ 1 つである．特に，$\mathcal{A}\ (\neq \{0\})$ が C^*-環で $1 \in \mathcal{A}$ が単位元ならば，$1^* = 1$ であり $||1|| = ||1^*1|| = ||1||^2$ より $||1|| = 1$ となる．

例 A.5.2　(1) Ω がコンパクト・ハウスドルフ空間のとき，$C(\Omega)$ は通常の積と対合 $f \mapsto \overline{f}$ により単位元をもつ可換 C^*-環となる．

(2) ルベーグ測度によるバナッハ空間 $(L^1(\mathbb{R}), ||\cdot||_1)$ を考える．各 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t-s)g(s)|dsdt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t-s)|dt \right) |g(s)|ds = ||f||_1 ||g||_1$$

であるから，a.e. $t \in \mathbb{R}$ について

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds \quad (\text{たたみ込み})$$

が定義できて，$\|f*g\|_1 \le \|f\|_1\|g\|_1$．また，$f^*(t)=\overline{f(-t)}$ と定めると $\|f^*\|_1=\|f\|_1$．このとき，$L^1(\mathbb{R})$ は積 $f*g$ と対合 f^* により可換バナッハ $*$-環となり，単位元をもたない．

(3) $\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とすると，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ は作用素の積と共役作用素をとる $*$-演算について C^*-環となる (命題 2.1.5 参照)．さらに，$\mathcal{A}$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ のノルム閉の $*$-部分環 (i.e. $*$-演算で閉じた部分環) とすると，$\mathcal{A}$ は C^*-環となる．ついでに，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の $*$-部分環で WOT-閉 (SOT-閉としても同じ) のものは**フォン・ノイマン環** (または W^***-環**) と呼ばれる．

以下，簡単のため $\mathcal{A}$ は単位元 1 をもつバナッハ環とする．$x\in\mathcal{A}$ について，$xx^{-1}=x^{-1}x=1$ となる $x^{-1}\in\mathcal{A}$ が存在するとき，x は**可逆**という．$x\in\mathcal{A}$ の**スペクトル**を

$$\sigma(x)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda 1-x \text{ が可逆でない }\}$$

と定める．このとき，3.1 節の補題 3.1.1 から命題 3.1.10 までがそのまま成立する．ただし，命題 3.1.9 (2) では $\mathcal{A}$ はバナッハ $*$-環とする．$x\in\mathcal{A}$ の**スペクトル半径**を

$$r(x)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(x)\}$$

と定めると，定理 3.1.12 が成立する．さらに，$\mathcal{A}$ が C^*-環で $x\in\mathcal{A}$ が正規 (i.e. $x^*x=xx^*$) のとき，命題 3.1.13 と同じく $r(x)=\|x\|$ が成立する．

補題 A.5.3 (ゲルファンド-マズールの定理) バナッハ環 $\mathcal{A}$ が体，すなわち，すべての $x\in\mathcal{A}\setminus\{0\}$ が可逆ならば，$\mathcal{A}=\mathbb{C}1$.

証明 任意の $x\in\mathcal{A}$ に対して，$\sigma(x)\ne\emptyset$ (定理 3.1.8) より，$\lambda\in\mathbb{C}$ が存在して $x-\lambda 1$ が可逆でない．仮定より $x-\lambda 1=0$．したがって $\mathcal{A}=\mathbb{C}1$. ■

補題 A.5.4 $\mathcal{I}$ を $\mathcal{A}$ の閉両側イデアル (線型部分空間であることも含む) とし，$\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}/\mathcal{I}$ を商写像 (i.e. $\pi(x)=x+\mathcal{I}$) とする．このとき，商ノルムと積 $\pi(x)\pi(y)=\pi(xy)$ $(x,y\in\mathcal{A})$ により，$\mathcal{A}/\mathcal{I}$ は単位元 $\pi(1)$ をもつバナッハ環になる．また，π は準同型写像である．

証明 命題 1.2.6 より $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ はバナッハ空間．積が上のように定義できて，定義 A.5.1 (1) の性質 (i)–(iv) を満たすことは容易に示せる．$\|\pi(x)\pi(y)\|\le$

$\|\pi(x)\|\,\|\pi(y)\|$ $(x, y \in \mathcal{A})$ も補題 6.1.1 の証明と同様である．よって $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ はバナッハ環になる．$\pi(1)$ が単位元であることと π が準同型であることは明らか．■

以下，$\mathcal{A}$ は単位元をもつ可換バナッハ環とする．

定義 A.5.5 (1) $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$ である $\mathcal{A}$ のイデアル $\mathcal{I}$ は，$\mathcal{I} \subsetneqq \mathcal{J} \subsetneqq \mathcal{A}$ であるイデアル $\mathcal{J}$ が存在しないとき，$\mathcal{A}$ の**極大イデアル**という．$\mathcal{A}$ の極大イデアル全体を $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ で表す．

(2) 恒等的には 0 でない線型汎関数 $\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ が準同型 (i.e. 積を保存する) のとき，χ を $\mathcal{A}$ の**指標**という．このとき，$\chi(1) = \chi(1)^2$ より $\chi(1) = 1$ となる．$\mathcal{A}$ の指標全体を $\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ で表す．

補題 A.5.6 $\chi \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A}) \mapsto \ker\chi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ は，$\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ から $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ への 1 対 1 上への対応である．

証明 $\chi \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ とすると，$\ker\chi$ は $\mathcal{A}$ のイデアルであり，$\mathcal{A}/\ker\chi$ $(\cong \mathbb{C})$ が 1 次元だから，明らかに極大である．このとき，$\chi \mapsto \ker\chi$ が単射であることは簡単にわかる．逆に $\mathcal{I} \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ とする．$x \in \mathcal{A}, y \in \overline{\mathcal{I}}$ のとき，$\|y_n - y\| \to 0$ となる $\{y_n\} \subset \mathcal{I}$ がとれて，$\|xy_n - xy\| \leq \|x\|\,\|y_n - y\| \to 0$ だから $xy \in \overline{\mathcal{I}}$. よって $\overline{\mathcal{I}}$ も $\mathcal{A}$ のイデアル．ところで，$\mathcal{I} \cap \{x : \|1-x\| < 1\} = \emptyset$ (補題 3.1.1) より $1 \notin \overline{\mathcal{I}}$. したがって，$\mathcal{I}$ の極大性より $\mathcal{I} = \overline{\mathcal{I}}$ がいえて，補題 A.5.4 より $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ はバナッハ環になる．任意の $x \in \mathcal{A} \backslash \mathcal{I}$ に対して，$\mathcal{J} = \{xy + z : y \in \mathcal{A},\ z \in \mathcal{I}\}$ とすると，$\mathcal{J}$ は $\mathcal{A}$ のイデアルで $\mathcal{I} \subsetneqq \mathcal{J}$. よって $\mathcal{J} = \mathcal{A}$ だから，$y \in \mathcal{A}$, $z \in \mathcal{I}$ がとれて $xy + z = 1$. このとき，$\pi(x)\pi(y) = \pi(1)$ となり $\pi(x)$ は可逆．ゆえに補題 A.5.3 より $\mathcal{A}/\mathcal{I} \cong \mathbb{C}$. $\chi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I} \cong \mathbb{C}$ により $\chi \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ が定まり，$\ker\chi = \mathcal{I}$. つまり $\chi \mapsto \ker\chi$ は全射．■

補題 A.5.7 (1) 任意の $x \in \mathcal{A}$ に対して次が成立：

$$\sigma(x) = \{\chi(x) : \chi \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A})\}, \tag{A.20}$$

$$|\chi(x)| \leq r(x) \leq \|x\|, \qquad \chi \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A}). \tag{A.21}$$

(2) $\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ は $\{\varphi \in \mathcal{A}^* : \|\varphi\| = 1\}$ に含まれる弱 $*$ 閉集合であり，それゆえ弱 $*$ コンパクト・ハウスドルフ空間である．

証明 (1) $\chi \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ で $\lambda = \chi(x)$ のとき，$\chi(\lambda 1 - x) = 0$ だから $\lambda 1 - x$ は可逆でない．よって $\lambda \in \sigma(x)$. 逆に，$\lambda 1 - x$ が可逆でないとき，$\{(\lambda 1 - x)y : y \in \mathcal{A}\}$ $(\neq \mathcal{A})$ が $\mathcal{A}$ のイデアルであり，これを含む $\mathcal{I} \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ が存在する (ツォルンの補題による)．補題 A.5.6 より $\mathcal{I}$ に対応する $\chi \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ がとれて $\chi(\lambda 1 - x) = 0$, すなわち $\lambda = \chi(x)$. これで (A.20) が示せた．(A.21) は (A.20) と $r(x) \leq ||x||$ (命題 3.1.5) より明らか．

(2) $\chi \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ のとき，$\chi(1) = 1$ と (A.21) より $\chi \in \mathcal{A}^*$ かつ $||\chi|| = 1$. また，ネット $\{\chi_j\} \subset \mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ が $\chi \in \mathcal{A}^*$ に弱 $*$ 収束するとき，$\chi(1) = \lim_j \chi_j(1) = 1$ かつ任意の $x, y \in \mathcal{A}$ に対して

$$\chi(xy) = \lim_j \chi_j(xy) = \lim_j \chi_j(x)\chi_j(y) = \chi(x)\chi(y).$$

よって $\chi \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ となり，$\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ は弱 $*$ 閉．したがって，アラオグルの定理 (演習問題 1.17) より，$\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ は弱 $*$ コンパクト・ハウスドルフ空間である． ■

各 $x \in \mathcal{A}$ に対して，$\hat{x}(\chi) = \chi(x)$ $(\chi \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$ と定めると，$\hat{x}$ は弱 $*$ 位相をもつ $\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ 上の連続関数となる．そこで $\gamma : \mathcal{A} \to C(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$ を $\gamma(x) = \hat{x}$ $(x \in \mathcal{A})$ と定義し，γ を $\mathcal{A}$ の**ゲルファンド変換**と呼ぶ．明らかに γ は線型写像であり，$x, y \in \mathcal{A}$ に対して

$$\widehat{xy}(\chi) = \chi(xy) = \chi(x)\chi(y) = \hat{x}(\chi)\hat{y}(\chi)$$

より $\gamma(xy) = \widehat{xy} = \hat{x}\hat{y} = \gamma(x)\gamma(y)$ となるから，γ は準同型写像である．$\mathcal{A}$ が可換 C^*-環のとき，この節の主定理である次の表現定理が導かれる．

定理 A.5.8 (ゲルファンド-ナイマルクの定理) 単位元をもつ可換 C^*-環 $\mathcal{A}$ は，ゲルファンド変換 γ により $C(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$ と等距離 $*$-同型である．

証明 $\mathcal{A}$ が可換 C^*-環だから，すべての $x \in \mathcal{A}$ が正規であり，(A.20) より

$$||\hat{x}|| = \sup\{|\chi(x)| : \chi \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A})\} = r(x) = ||x||$$

(命題 3.1.13)．よって γ は等距離写像である．γ の $*$-準同型性を示すために，$x \in \mathcal{A}$ が $x = x^*$ とする．各 $t \in \mathbb{R}$ に対して，$u_t = e^{itx} = \sum_{n=0}^{\infty} (itx)^n/n!$ が $\mathcal{A}$ で絶対ノルム収束し，$u_t^* = u_{-t}$, $u_{-t}u_t = 1$ が成立する．このとき，

$u_t^* u_t = 1$ より $\|u_t\| = 1$ だから，任意の $\chi \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ に対して

$$1 \geq |\chi(u_t)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it\chi(x))^n}{n!} \right| = |e^{it\chi(x)}|, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

ゆえに $\chi(x) \in \mathbb{R}$ が得られる．任意の $x \in \mathcal{A}$ に対して，$y = (x + x^*)/2$, $z = (x - x^*)/2i$ とおくと，$y = y^*, z = z^*$ であり $x = y + iz$ かつ $x^* = y - iz$. このとき，$\chi(x), \chi(y) \in \mathbb{R}$ より

$$\widehat{x^*}(\chi) = \chi(x^*) = \chi(y) - i\chi(z) = \overline{\chi(y) + i\chi(z)} = \overline{\chi(x)} = \overline{\hat{x}(\chi)}.$$

したがって $\gamma(x^*) = \overline{\gamma(x)}$. これで γ が等距離 $*$-準同型であることが示せた．これより，$\gamma(\mathcal{A}) = \{\hat{x} : x \in \mathcal{A}\}$ は $C(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$ の閉部分環であり，$1 = \hat{1} \in \gamma(\mathcal{A}), f \in \gamma(\mathcal{A}) \Longrightarrow \overline{f} \in \gamma(\mathcal{A})$ を満たす．さらに，$\gamma(\mathcal{A})$ が $\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ の 2 点を分離することも明らか．ゆえに定理 A.4.4 より $\gamma(\mathcal{A}) = C(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$ となり，γ は全射である．■

注意 A.5.9　$\mathcal{A}$ が単位元を含まない可換 C^*-環のときは，$\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ は弱 $*$ 局所コンパクト・ハウスドルフ空間であり，ゲルファンド変換により $\mathcal{A}$ は $C_0(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$ と等距離 $*$-同型である．証明の概略を述べると，$\mathcal{A}$ に単位元を付加した $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + \mathbb{C}1$ は適当なノルムで C^*-環となり，$\mathcal{A}$ は $\tilde{\mathcal{A}}$ の C^*-部分環である．上の定理より $\tilde{\mathcal{A}} \cong C(\mathrm{Sp}(\tilde{\mathcal{A}}))$. 各 $\chi \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ に対して，$\tilde{\chi}(x + \alpha 1) = \chi(x) + \alpha$ と定めると $\tilde{\chi} \in \mathrm{Sp}(\tilde{\mathcal{A}})$. $\tilde{\chi}_\infty(x + \alpha 1) = \alpha$ とすると，$\mathrm{Sp}(\tilde{\mathcal{A}}) = \{\tilde{\chi} : \chi \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A})\} \cup \{\tilde{\chi}_\infty\}$ であり，$\chi \mapsto \tilde{\chi}$ により $\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ は $\mathrm{Sp}(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\tilde{\chi}_\infty\}$ と位相同型．これより結論が示せる．

上で証明したゲルファンド-ナイマルクの定理は，単位元をもつ可換 C^*-環が例 A.5.2 (1) でつくされることを意味する．一般の C^*-環については，任意の C^*-環があるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界作用素のなす C^*-環 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (例 A.5.2 (3)) と等距離 $*$-同型となることがいえる (もう 1 つの**ゲルファンド-ナイマルクの定理**). ついでに，フォン・ノイマン環はあるバナッハ空間の共役空間となっている C^*-環として特徴づけられる (**境の定理**). また，すべての可換フォン・ノイマン環はある測度空間上の L^∞-空間として実現できる．

最後に，正規作用素のスペクトル分解定理を証明しよう．

定理 A.5.10 (正規作用素のスペクトル分解) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が正規のとき，コンパクトな台をもつ $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ 上のスペクトル測度が一意的に存在して $A = \int \zeta dE(\zeta)$. このとき，$\sigma(A)$ が E の台と一致する．

証明 $\{A, I\}$ で生成される $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の C^*-部分環 (i.e. ノルム閉の $*$-部分環) を $\mathcal{A}$ とする．A が正規だから，$\mathcal{A}$ は可換で単位元をもつ．実際，$\mathcal{A}$ は A, A^* の多項式 $\sum_{k,l=0}^{n} \alpha_{kl} A^k A^{*l}$ の全体のノルム閉包である．したがって定理 A.5.8 より，ゲルファンド変換 $\gamma : \mathcal{A} \to C(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$ は等距離 $*$-同型である．いま，$\tau : \mathrm{Sp}(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ を

$$\tau(\chi) = \chi(A) \ (= \gamma(A)(\chi)), \qquad \chi \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A})$$

と定める．$\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ について，$\tau(\chi_1) = \tau(\chi_2)$ とすると

$$\begin{aligned}
\chi_1\left(\sum_{k,l=0}^{n} \alpha_{kl} A^k A^{*l}\right) &= \sum_{k,l=0}^{n} \alpha_{kl} \chi_1(A)^k \overline{\chi_1(A)}^l \\
&= \sum_{k,l=0}^{n} \alpha_{kl} \chi_2(A)^k \overline{\chi_2(A)}^l \\
&= \chi_2\left(\sum_{k,l=0}^{n} \alpha_{kl} A^k A^{*l}\right)
\end{aligned}$$

だから $\chi_1 = \chi_2$. よって τ は単射であり，(A.20) より $\tau(\mathrm{Sp}(\mathcal{A})) = \sigma(A)$. $\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ のコンパクト性より，τ は $\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ と $\sigma(A)$ との位相同型を与える．$\tilde{\tau}(f) = f \circ \tau$ $(f \in C(\sigma(A)))$ とすると，$\tilde{\tau} : C(\sigma(A)) \to C(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$ は等距離 $*$-同型．ゆえに $\Phi = \gamma^{-1} \circ \tilde{\tau} : C(\sigma(A)) \to \mathcal{A}$ は等距離 $*$-同型であり，$\Phi(1) = I$ を満たす．したがって定理 3.2.16 より $(\sigma(A), \mathcal{B}_{\sigma(A)})$ 上のスペクトル測度 E が存在して

$$\Phi(f) = \int_{\sigma(A)} f dE, \qquad f \in C(\sigma(A)).$$

$f_0(\zeta) = \zeta$ について

$$\tilde{\tau}(f_0)(\chi) = \tau(\chi) = \chi(A) = \gamma(A)(\chi), \qquad \chi \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A})$$

だから $\Phi(f_0) = A$ となり，$A = \int_{\sigma(A)} \zeta dE(\zeta)$ が得られる．ところで，$\tilde{E}$ をコンパクトな台をもつ $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ 上のスペクトル測度で $A = \int \zeta d\tilde{E}(\zeta)$ とす

る．このとき，定理 3.2.17 の証明と同様に，$\tilde{E}$ (特に E) の台が $\sigma(A)$ と一致することが示せる．任意の多項式 $p(\zeta)=\sum_{k,l=0}^{n}\alpha_{kl}\zeta^k\overline{\zeta}^l$ に対して，命題 3.2.13 より

$$\int_{\sigma(A)} pdE = \Phi(p) = \sum_{k,l=0}^{n}\alpha_{kl}A^kA^{*l} = \int_{\sigma(A)} pd\tilde{E}.$$

系 A.4.6 (2) より，上の等式はすべての $f\in C(\sigma(A))$ に対して成立する．ゆえに，定理 3.2.16 における一意性から $E=\tilde{E}$ が得られ，E の一意性がいえた．■

系 A.5.11　$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ が正規のとき，$\Phi(1)=I, \Phi(f_0)=A$ (ただし $f_0(\zeta)=\zeta$) を満たす等距離 $*$-準同型写像 $\Phi: C(\sigma(A))\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ が一意的に存在する．

証明　Φ の存在は前定理の証明で示した．一意性は，定理 3.2.2 の証明と同様にして，系 A.4.6 (2) より簡単に示せる．■

正規作用素 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ と $f\in C(\sigma(A))$ に対して，定義 3.2.3 と同様に上の Φ を用いて $f(A)=\Phi(f)$ と定義し，A の f による連続関数カルキュラスと呼ぶ．このとき，定理 3.2.7 と同じく次が成立．

定理 A.5.12 (スペクトル写像定理)　$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ が正規のとき，任意の $f\in C(\sigma(A))$ に対して $\sigma(f(A))=f(\sigma(A))$.

証明　$\mathcal{A}$ を $\{A,I\}$ で生成される $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の C^*-部分環とすると，定理 A.5.10 の証明より $\Phi: C(\sigma(A))\to\mathcal{A}$ は等距離 $*$-同型．したがって

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f(A))=\sigma_{C(\sigma(A))}(f)=f(\sigma(A)).$$

ただし $B\in\mathcal{A}$ の $\mathcal{A}$ におけるスペクトルを $\sigma_{\mathcal{A}}(B)$ で表す．そこで $\sigma_{\mathcal{A}}(B)$ が B の $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ におけるスペクトル $\sigma(B)$ と一致することを示せばよい．$\sigma(B)\subset\sigma_{\mathcal{A}}(B)$ は明らか．逆に，$\lambda\notin\sigma(B)$ ならば $(\lambda I-B)^{-1}\in\mathcal{A}$ を示す．$\lambda I-B$ を改めて B とおいて，B が $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で可逆ならば $B^{-1}\in\mathcal{A}$ をいえばよい．$B=B^*$ の場合，(A.20) と定理 A.5.8 の証明より $\sigma_{\mathcal{A}}(B)\subset\mathbb{R}$. したがって，任意の $\varepsilon\in\mathbb{R}, \varepsilon\neq 0$ に対して $(B-i\varepsilon I)^{-1}\in\mathcal{A}$ であり，命題 3.1.3 より $\|(B-i\varepsilon I)^{-1}-B^{-1}\|\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$. $\mathcal{A}$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で閉だから $B^{-1}\in\mathcal{A}$. $B=B^*$ でない場合でも，B^*B が可逆だから $(B^*B)^{-1}\in\mathcal{A}$ となり，$B^{-1}=(B^*B)^{-1}B^*\in\mathcal{A}$. ゆえに $\sigma_{\mathcal{A}}(B)=\sigma(B)$ がいえて，結論が得られる．■

文献ノート

このノートでは，本書を著すに際して参考にした図書と論文，概略しか述べなかったり証明を省略した部分についての参考文献，さらに有名な結果の原論文などについて説明しよう．しかし，以下に挙げる図書 (特に和書，訳書) には，絶版になっているものも多いことを断っておく．

まず，第 1–3 章に関連する文献を一括して述べておこう．本書で簡単に済ませたバナッハ空間論を含む関数解析学の一般的な参考書としては，[19], [24], [48], [51], [64], [81], [92] などが挙げられる．ヒルベルト空間論については，本書の第 1 章の内容で十分であるが，注意 1.1.16 で述べた事柄については [38] が詳しい．ヒルベルト空間上の線型作用素について，基本的な事柄は [8] が詳しくて分かりやすい．スペクトル分解理論を中心とした本格的な解説書として，[72] と [1] は名著の誉れが高い．また，数理物理学の観点から書かれた [71] は特に非有界作用素について詳しい．ヒルベルト空間を基礎に量子力学を定式化した [88] は作用素論の立場からも示唆に富み，60 年以上を経た現在でも斬新さは失われていない．問題集の形をとった [39] は真面目に取り組むだけの価値がある．[57] は楽しく読めて，スペクトル分解定理の真髄にまで触れることができる．[38] にもスペクトル分解定理が要領よくまとめられている．ついでに，非有界自己共役作用素のスペクトル分解の面白い証明が [49] にある．定理 2.1.23 は [28] による．第 3 章の最後に述べた SNAG 定理については [56] が詳しい (SNAG の 4 人の原論文は [72] の文献を見よ)．

4.1 節のコンパクト作用素についての解説として [76] が知られている．4.2 節でシャッテン・クラスについて説明したが，一般の作用素イデアルについては [37] が最も詳しく，[76], [78] も読みやすい．[42] は，作用素の特異値に関するマジョリゼーション理論の観点から，作用素イデアルをまとめている．

5.1 節で解説した作用素単調関数のレーヴナー理論は [55] を嚆矢とするが，ドイツ語の論文でもあり読みやすくない．この本では主に [4] と [41] を参考にした．他に [23] はよい文献であり，[27] は詳しい解説書である．命

題 5.1.13, 5.1.14 のアイデアは [55] にあるが，証明は [4], [23], [41] などを見よ．定理 5.1.15 は [7] によるが，[4] にも紹介されている [52] の証明が卓抜である．また [41] にも，定理 5.1.15 の証明がショケー分解を使う独自の方法で与えられている．情報関数 $\eta(t) = -t\log t$ の作用素凹性の最初の証明は [58] と [22] による．ついでに，量子論的なエントロピー論については，[59], [83] が詳しい．5.1 節の最後で示したフルタ不等式の原論文は [34, 35].

5.2 節は [54] を中心にまとめたが，[4], [53] も参考にした．[4] では調和平均と幾何平均が詳しく解説されている．並列和は，電気回路の並列接続の観点から [2] により導入された．他方，幾何平均の導入は [66] が最初であろう．補題 5.2.21 と命題 5.2.22 の証明は [54] (また [53]) を見よ．命題 5.2.23 の証明は [17], [53] にある．さらに，ガウス平均などについては [32, 33] を見よ．

6.1 節のフレドホルム理論について [29] が定評がある．本書の解説では，[19] の記述を参考にしたが，主定理 (定理 6.1.18) の証明などはかなり簡略化されている．フレドホルム理論と関係が深いが，本書でとり挙げなかったテープリッツ作用素に関する解説も [29] に含まれている．6.1 節の最後に述べた BDF 理論は [15] に発表された．他に [30] もあるが，いずれにしても気軽には読めない．

6.2 節は有名な [80] の他に [21], [62] も参考にした．[72] の付録にも解説がある．フォン・ノイマンの不等式の原論文 [89] は労作であるが，ユニタリー・ダイレーションを用いる証明ができて，[89] の証明は意義を失った．定理 6.2.10 の原論文は [3]. 注意 6.2.11 (2) の反例は [60] で与えられた．一般の C^*-環に対するシュタインスプリングの表現定理 (定理 6.2.14) は，原論文 [79] または [62], [84] を見よ．6.2 節の最後に述べたその他のダイレーション型定理については，上に挙げた [21], [62], [80] が参考になる．例えば，ρ-ダイレーションは [80] に解説がある．

6.3 節は [18], [20] を参考にした．[18] を拡大発展させた [20] は，サブ正規作用素とハイポ正規作用素の理論の現状を知るには最良であろう．定理 6.3.15 の原論文は [14]. 定理 6.3.16 に関係した論文は [12], [31]. 完全には証明しなかった定理 6.3.17 は [10] によるが，証明は [18] または [20] を見よ．定理 6.3.18, 系 6.3.19, 定理 6.3.20 の原論文はそれぞれ [9], [67], [16]. 定理 6.3.18, 6.3.20 の改良された証明が [20] に与えられている．6.3 節の最後で不変部分空間問題との関連で言及したアロンシャイン-スミスの定理は，原

論文 [5] または [73] を見よ．また，リードの論文は [69, 70].

6.4 節の主要部分は [61], [86], [87] を参考にした．バナッハ空間値の測度・積分については [25] が詳しい．ヒルベルト空間上のガウス測度に関して，定理 6.4.21, 6.4.23 は [68] に，定理 6.4.22 は [44], [87] に基づく．定理 6.4.24 は定理 6.4.23 の式を用いて直接計算すればよい (演習問題 6.19)．最後の定理 6.4.25 は [6], [47] に基づく．

付録の A.1 節で言及した位相線型空間については，一時期盛んであったが，研究分野としてはかなり以前に終っている．著者の考えでは，バナッハ空間の弱位相，弱 $*$ 位相や $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の WOT, SOT などの局所凸線型位相を扱うのに必要な基本的事項と，付録で説明したハーン-バナッハの分離定理やクレイン-ミルマンの端点定理の知識があれば十分である．一般の位相線型空間の参考書として 1 冊だけ [50] を挙げておく．

A.2 節のリース-マルコフ-角谷の表現定理については，[74], [91] などを参考にした．また，測度・積分論の一般的な参考書として [40], [45], [85] を挙げておく．A.3 節で述べたクレイン-シュムリアンの定理の証明は，例えば [19] を見よ．A.3 節の最後に述べたショケー理論については [65] を薦める．

A.4 節のビショップの定理の原論文は [11] であるが，定理 A.4.3 (1) の証明は [36] に基づいた．しかし，この証明のアイデアはもともと [26] にある．関数環とバナッハ環については [56], [90] が詳しい．ストーン-ワイエルシュトラスの定理 (定理 A.4.4 と注意 A.4.5) の本質を理解するには，もとのストーン流の証明の方がよい．この証明は例えば [77] に詳しい．

A.5 節で主に可換 C^*-環の表現定理を説明したが，さらに進んで作用素環論を学ぶには [46], [63], [75], [82], [84] などが標準的である．また，作用素環と量子統計力学との関係を詳述したものに [13] がある．

最後に，有限次元の作用素論である行列論について一言述べておこう．行列論には，一般の作用素論にない精密な理論がいくつもあり，それ自身で興味ある独自の世界を形成している．しかし，行列論はある意味で作用素論および作用素環論の土台であり，線型代数と行列の理解なしには無限次元の作用素解析は始まらないというのが，著者の考えである．行列論の最新の専門書として [43] の 2 冊本を挙げておく．

参考文献

[1] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space* (英訳), Ungar, New York, 1961; アヒエゼル-グラズマン, ヒルベルト空間論 (上下), 共立出版, 1972/1973.

[2] W. N. Anderson and R. J. Duffin, Series and parallel addition of matrices, *J. Math. Anal. Appl.* **26** (1969), 576–594.

[3] T. Ando, On a pair of commutative contractions, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **24** (1963), 88–90.

[4] T. Ando, *Topics on Operator Inequalities*, Lecture notes (mimeographed), Hokkaido Univ., Sapporo, 1978.

[5] N. Aronszajn and K. T. Smith, Invariant subspaces of completely continuous operators, *Ann. of Math.* **60** (1954), 345–350.

[6] C. R. Baker, Zero-one laws for Gaussian measures on Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **186** (1973), 291-308.

[7] J. Bendat and S. Sherman, Monotone and convex operator functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **79** (1955), 58–71.

[8] S. K. Berberian, *Introduction to Hilbert Space*, Chelsea, New York, 1961.

[9] C. A. Berger and B. I. Shaw, Selfcommutators of multicyclic hyponormal operators are always trace class, *Bull. Amer. Math. Soc.* **79** (1973), 1193–1199.

[10] E. Bishop, Spectral theory for operators on a Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **86** (1957), 414–445.

[11] E. Bishop, A generalization of the Stone-Weierstrass theorem, *Pacific J. Math.* **11** (1961), 777-783.

[12] J. Bram, Subnormal operators, *Duke Math. J.* **22** (1955), 75–94.

[13] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I, II*, Springer-Verlag, New York, 1979/1981.

[14] A. Brown, On a class of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* **4** (1953), 723–728.

[15] L. G. Brown, R. G. Douglas and P. A. Fillmore, Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C^*-algebras, *Proceedings of a Conference on Operator Thoery*, P. A. Fillmore (ed.), Lecture Notes in Math., Vol. 345, Springer-Verlalg, 1973, pp. 58–128.

[16] S. W. Brown, Some invariant subspaces for subnormal operators, *Integral Equations Operator Theory* **1** (1978), 310–333.

[17] B. C. Carlson, The logarithmic mean, *Amer. Math. Monthly* **79** (1972), 615–618.

[18] J. B. Conway, *Subnormal Operators*, Res. Notes in Math., Vol. 51, Pitman, Boston, 1981.

[19] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[20] J. B. Conway, *The Theory of Subnormal Operators*, Math. Surveys and Monographs, Vol. 36, Amer. Math. Soc., 1991.

[21] K. R. Davidson, *Nest Algebras*, Pitman Res. Notes in Math. Ser., Vol. 191, Longman, Harlow Essex, 1988.

[22] C. Davis, Operator-valued entropy of a quantum mechanical measurement, *Proc. Japan Acad.* **37** (1961), 533–538.

[23] C. Davis, Notions generalizing convexity for functions defined on spaces of matrices, Proc. Symposia in Pure Math., Vol. 7: *Convexity*, Amer. Math. Soc., 1963, pp. 187–201.

[24] M. M. Day, *Normed Linear Spaces* (3rd ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[25] J. Diestel and J. J. Uhl, Jr., *Vector Measures*, Mathematical Surveys, No. 15, Amer. Math. Soc., 1977.

[26] L. de Branges, The Stone-Weierstrass theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **10** (1959), 822–824.

[27] W. Donoghue, *Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[28] R. G. Douglas, On Majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hibert space, *Proc. Amer. Math. Soc.* **17** (1966), 413–415.

[29] R. G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Academic Press, New York, 1972.

[30] R. G. Douglas, *C^*-Algebra Extensions and K-Homology*, Ann. Math. Studies, No. 95, Princeton U. P., Princeton, 1980.

[31] M. R. Embry, A generalization of the Halmos-Bram criterion for subnormality, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **35** (1973), 61–64.

[32] J. I. Fujii, Arithmetico-geometric mean of operators, *Math. Japon.* **23** (1979), 667–669.

[33] J. I. Fujii, On geometric and harmonic means of positive operators, *Math. Japon.* **24** (1979), 203–207.

[34] T. Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$, *Proc. Math. Soc.* **101** (1987), 85–88.

[35] T. Furuta, An elementary proof of an order preserving inequality, *Proc. Japan Acad.* **65A** (1989), 126.

[36] I. Glicksberg, Measures orthogonal to algebras and sets of antisymmetry, *Trans. Amer. Math. Soc.* **105** (1962), 415–435.

[37] I. C. Gohberg and M. G. Krein, *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators*, Transl. Math. Monographs, Vol. 18, Amer. Math. Soc., 1969.

[38] P. R. Halmos, *Introduction to Hilbert Spaces and the Theory of Spectral Multiplicity*, Chelsea, New York, 1951; ハルモス, ヒルベルト空間入門, 東京図書, 1972.

[39] P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[40] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[41] F. Hansen and G. K. Pedersen, Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem, *Math. Ann.* **258** (1982), 229–241.

[42] F. Hiai, Log-majorization and norm inequalities for exponential operators, submitted to *Linear Operators*, Banach Center Publications.

[43] R. A. Horn and C. R. Johnson, Matrix Analysis / Topics in Matrix Analysis, Cambridge U. P., Cambridge, 1985/1991.

[44] K. Ito, The topological support of Gaussian measure on Hilbert space, *Nagoya Math. J.* **38** (1970), 181-183.

[45] S. Itō, ルベーグ積分入門, 裳華房, 1963.

[46] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, Vol. I, Academic Press, New York, 1983.

[47] G. Kallianpur, Zero-one laws for Gaussian processes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **149** (1970), 199-211.

[48] T. Kato, 位相解析, 共立出版, 1967.

[49] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators* (2nd ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[50] J. L. Kelley and I. Namioka, *Linear Topological Spaces*, Van Nostrand, Princeton, 1963.

[51] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elements of Fucntion Theory and of Functional Analysis* (ロシア語), Moscow, 1954; コルモゴロフ-フォミーン, 函数解析の基礎 (上下), 岩波書店, 1979.

[52] A. Korányi, On a theorem of Löwner and its connection with resolvents of selfadjoint transformations, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **17** (1956), 63–70.

[53] F. Kubo, *Theory of Operator Means*, Doctor thesis, Hokkaido Univ., 1991.

[54] F. Kubo and T. Ando, Means of positive linear operators, *Math. Ann.* **246** (1980), 205–224.

[55] K. Löwner, Über monotone Matrixfunktionen, *Math. Z.* **38** (1934), 177–216.

[56] M. A. Naimark, *Normed Rings* (英訳), P. Noordhoff, Groningen, 1960; *Normed Algebras* (2nd ed.) (英訳), Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972; M. A. ナイマルク, 関数解析入門 (I, II), 共立全書, 1964/1965.

[57] M. Nakamura, 関数解析入門, 槇書店, 1968.

[58] M. Nakamura and H. Umegaki, A note on the entropy for operator algebras, *Proc. Japan Acad.* **37** (1961), 149–154.

[59] M. Ohya and D. Petz, *Quantum Entropy and Its Use*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[60] S. K. Parrott, Unitary dilations for commuting contractions, *Pacific J. Math.* **34** (1970), 481–490.

[61] K. R. Parthasarathy, *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press, New York, 1967.

[62] V. I. Paulsen, *Completely Bounded Maps and Dilations*, Pitman Res. Notes in Math. Ser., Vol. 146, Longman, Harlow Essex, 1986.

[63] G. K. Pedersen, *C^*-Algebras and Their Automorphism Groups*, Academic Press, London, 1979.

[64] G. K. Pedersen, *Analysis Now*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[65] R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's Theorem*, Van Nostrand, New York, 1966.

[66] W. Pusz and S. L. Woronowicz, Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map, *Rep. Math. Phys.* **8** (1975), 159–170.

[67] C. R. Putnam, An inequality for the area of hyponormal spectra, *Math. Z.* **116** (1970), 323–330.

[68] C. R. Rao and V. S. Varadarajan, Discrimination of Gaussian processes, *Sankhyā Ser. A* **25** (1963), 303-330.

[69] C. J. Read, A solution to the invariant subspace problem, *Bull. London Math. Soc.* **16** (1984), 337–401.

[70] C. J. Read, A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ_1, *Bull. London Math. Soc.* **17** (1985), 305–317.

[71] M. Reed and B. Simon, *Method of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis* (revised and enlarged ed.), Academic Press, New York, 1980.

[72] F. Riesz and B. Sz.-Nagy *Leçons d'analyse fonctionelle*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952; *Functional Analysis* (英訳), Unger, New York, 1955; リース-ナジー, 関数解析学 (上下), 共立出版, 1973/1974.

[73] J. R. Ringrose, *Compact Non-Self-Adjoint Operataors*, Van Nostrand, London, 1971.

[74] W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (3rd ed.), McGraw-Hill, New York, 1987.

[75] S. Sakai, *C^*-Algebras and W^*-Algebras*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[76] R. Schatten, *Norm Ideals of Completely continuous Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[77] G. F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1963.

[78] B. Simon, *Trace Ideals and Their Applications*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 35, Cambridge U. P., Cambridge, 1979.

[79] W. F. Stinespring, Positive functions on C^*-algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), 211–216.

[80] B. Sz.-Nagy and C. Foiaş, *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Spaces*, North-Holland, Amsterdam / Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.

[81] O. Takenouchi, 関数解析, 朝倉書店, 1968.

[82] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[83] H. Umegaki and M. Ohya, 量子論的エントロピー, 共立出版, 1984.

[84] H. Umegaki, M. Ohya and F. Hiai, 作用素代数入門, 共立出版, 1985.

[85] H. Umegaki, M. Ohya and M. Tsukada, 測度・積分・確率, 共立出版, 1987.

[86] N. N. Vakhania, *Probability Distributions on Linear Spaces*, North Holland, New York-Oxford, 1981.

[87] N. N. Vakhania, V. I. Tarieladze and S. A. Chobanyan, *Probability Distributions on Banach Spaces*, D. Reidel, Dordrecht, 1987.

[88] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer-Verlag, Berlin, 1932; J. V. ノイマン, 量子力学の数学的基礎, みすず書房, 1957.

[89] J. von Neumann, Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, *Math. Nachr.* **4** (1951), 258–281.

[90] J. Wada, ノルム環, 共立出版, 1969.

[91] Y. Yamasaki, 無限次元空間上の測度 (上), 紀伊國屋書店, 1978.

[92] K. Yosida, *Functional Analysis* (2nd ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1968.

索　引

た　行

な　行

は　行

ま　行

や　行

ら　行

わ　行

記　号

著者略歴

日合　文雄
ひあい　ふみお

1970年　東京工業大学理学部数学科卒業
1975年　東京工業大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了
東京工業大学理学部助手，東京理科大学理工学部講師・助教授，北海道大学応用電気研究所助教授を経て，
現　在　茨城大学理学部教授（理学博士）

主要著書
作用素代数入門（共著，共立出版，1985）

柳　研二郎
やなぎ　けんじろう

1974年　東京工業大学理学部情報科学科卒業
1976年　東京工業大学大学院理学研究科情報科学専攻修士課程修了
山口大学理学部助手・講師・助教授を経て，
現　在　山口大学工学部教授（理学博士）

数理情報科学シリーズ10
ヒルベルト空間と線型作用素

1995年 7月10日　初版第1刷発行
1997年10月 1日　初版第2刷発行

著　者········日合文雄
柳研二郎
発行者········牧野末喜
発行所········㈲牧野書店
〒114　東京都北区西ケ原 3-60-18
電話(03)3949-2344・振替 00190-0-661932
発売所········㈱星雲社
〒112　東京都文京区大塚3-21-10
電話(03)3947-1021・FAX(03)3947-1617
印刷・製本····大日本法令印刷㈱

ISBN4-7952-0103-X C3341